MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN

http://vnmaths3.wordpress.com

22/10/2009

Khi giải các bài toán tìm giới hạn, điều trước tiên, ta cần xem xét đại lượng cần tìm có thuộc dạng vô định hay không. Có bảy dạng vô định: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $\infty.0$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}. Nếu không thuộc dạng vô định nào thì không cần biến đổi, chỉ việc áp dụng định lý, tính chất của phép tính giới hạn để tính trực tiếp. Nếu gặp dạng vô định (có thể có giới hạn hay không có giới hạn), ta cần phải biến đổi, "khử" dạng vô định để tìm giới hạn. Phương pháp biến đổi để khử dạng vô định là một "nghệ thuật" tùy từng bài cụ thể mà ta có các cách khác nhau. Tuy nhiên, ở đây, ta có thể kể đến một số phương pháp thường gặp.

1 PP ngắt bỏ VCL bậc thấp

Nếu $f,\ g,\ u$ là các VCL trong một quá trình, trong đó f là VCL bậc cao nhất, khi đó $f \pm g \pm u \sim f$.

Chú ý rằng $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... \sim a_0x^n$, $\sqrt[k]{P_n(x)} \sim \sqrt[k]{a_0x^n}$ khi $x \to \infty$, ở đây k, n nguyên dương, a_i hằng số, $a_0 \neq 0$.

Khi $n \to \infty$, ta có thể xếp các VCL theo thứ tự bậc cao dần như sau: $\ln n$; n^{α_1}; , n^{α_2}(với $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$); a_1^n; a_2^n(với $a_2 > a_1 > 1$); $n!$; n^n. Ta xét một vài ví dụ.

Ví dụ 1.1. $\lim\limits_{x\to vc}\dfrac{3x^2+2x+8}{4x^2+4x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{4x^2} = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{2n^4} = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+4^x)}{4^x-3^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x}{4^x} = 1$.

Ví dụ 1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+1)!-(n+2)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{-(n+2)!} = -1$.

Ví dụ 1.5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+1}-\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^4+1}+\sqrt[3]{n^3+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+1}}{\sqrt{n^3+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{5/4}}{n^{3/2}} = 0.$$

2 PP ngắt bỏ VCB bậc cao

Nếu $p(x)$; $q(x)$; $v(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình nào đó. Khi đó $p(x) \pm q(x) \pm v(x) \sim p(x)$ trong quá trình đó nếu $p(x)$ là VCB bậc thấp. Khi $x \to 0$, ta chú ý các VCB tương đương sau $\sin x \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $(e^x - 1 \sim x)$; $\ln(1+x) \sim x$; $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ với $\alpha > 0$ bất kì.

Ví dụ 2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin^2 x+\tan^3 x}{2x+3x^5+5x^7} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-(arcsinx)^2}{x+(arctgx)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

3 PP thay VCB(VCL) tương đương

Nếu các VCB (hay VCL) $p(x)\sim u(x)$; $q(x)\sim v(x)$ trong quá trình nào đó thì $lim\dfrac{p(x)}{q(x)}=lim\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Ngoài các cặp VCB đã nêu ta còn có $acrsinx\sim x$; $tgx\sim x$; $1-cosx\sim\dfrac{1}{2}$; $arctgx\sim x$ khi $x\to 0$.

Ví dụ 3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos2x+tg^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=3.$

Ví dụ 3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/5}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{5}x}{x}=\dfrac{1}{5}.$

Ví dụ 3.3. Tính $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{sinmx}{sinnx}$ với m, n là các số nguyên

Với bài tập trên, ta không thể thay $sinmx\sim mx$ vì $mx\not\to 0$ khi $x\to\pi$. Ta có thể đổi biến $x=\pi+t$, để chuyển quá trình $x\to\pi$ bằng quá trình $t\to 0$; quá trình này ta có nhiều vô cùng bé tương đương. Một cách tổng quát khi tìm giới hạn với quá trình $x\to a\neq 0$, ta đều có thể biến đổi $x-a=t$. Hoặc ta làm xuất hiện $x-a$ trong biểu thức cần tính giới hạn. Cụ thể ta có

$$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{sinmx}{sinnx}=\lim\limits_{x\to pi}\dfrac{sin(x-\pi+\pi)m}{sin(x-\pi+\pi)n}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{cosmx.sinm(x-\pi)}{cosnx.sinn(x-\pi)}=$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{(-1)^m m(x-\pi)}{(-1)^n n(x-\pi)} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

Ví dụ 3.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 2.$

4 PP biến đổi

Để tìm giới hạn, người ta còn thực hiện nhiều phép biến đổi khác nhau, làm mất dạng vô định.

a) Gặp căn thức, ta có thể nhân với lượng liên hợp để khử căn.

Ta dùng hệ thức $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$.

Ví dụ 4.1.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

Ví dụ 4.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{2}{3}.$$

b) Khi ta tìm giới hạn của tỷ số hai đa thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *khi* $x \to a$ *mà* $P(a) = Q(a) = 0$, *ta viết* $P(x) = (x-a)P_1(x)$; $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$ *để ước lược.*

Ví dụ 4.3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2+x)}{(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x}{x-3} = -\dfrac{2}{5}$.

Ví dụ 4.4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sin^2x+sinx-1}{2sin^2x-3sinx+1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2sinx-1)(sinx+1)}{(2sinx-1)(sinx-1)} = -3.$$

c) Trong trường hợp đối số nguyên, thường viết $n\to\infty$, ta có thể biến đổi triệt tiêu từng cặp số hoặc sử dụng công thức tổng của cấp số cộng hay cấp số nhân.

Ví dụ 4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}[1-\dfrac{1}{n}]\right] = 1$.

Ví dụ 4.6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+....-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-2)+(2-3)+...-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$$

Ví dụ 4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n-1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+...+(n-1)) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Sự thay thế tương đương còn thể hiện trong tích và tổng. Cụ thể:

- *Nếu* $\alpha\sim\overline{\alpha}$; $\beta\sim\overline{\beta}$ thì $\alpha\beta\sim\overline{\alpha}\overline{\beta}$.

- *Nếu α, β là các VCB (hay VCL) cùng cấp cơ sở nghĩa là $\alpha \sim Ax^m$, $\beta \sim Bx^m$ khi $x \to 0$ (hay $x \to \infty$) thì $\alpha \pm \beta \sim (A \pm B)x^m$ nếu $A \pm B \neq 0$.*

Nhưng không thể coi $tgx - sinx$ tương đương với $x - x$.

Trong khi thay thế tương đương, ta cần phải chú ý, nếu là hiệu hai VCB (hay VCL) tương đương thì không được thay thế vì hiệu hai VCB tương đương là VCB bậc cao, còn hiệu hai VCL tương đương là VCL bậc thấp.

5 Sử dụng qui tắc De L'Hospital

Một trong những ứng dụng của đạo hàm là tìm giới hạn của hàm số nhờ các qui tắc L'Hospital. Kho $x \to a$, giới hạn của tỷ số hai hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, mà lúc đó tỷ số $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có giới hạn xác định khi $x \to a$, thì $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Trong trường hợp nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ lại vẫn thuộc dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ và thỏa mãn các điều kiện của qui tắc L'Hospital, ta lại áp dụng qui tắc này lần nữa và có thể tiếp tục như thế nhiều lần (nếu điều kiện thỏa mãn).

Ví dụ 5.1. Tìm $I = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sinx}$.

Giới hạn này thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$, dụng qui tắc L'Hospital, ta có $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-e^{-x}-2}}{1-cosx}$. Áp dụng qui tắc L'Hospital một lần nữa ta có $I = 2$.

Ví dụ 5.2. Tính $J = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $a > 0$.

Áp dụng qui tắc L'Hospital ta có $J = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}} = \dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}}$

Nên nhớ rằng, qui tắc L'Hospital chỉ áp dụng để khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$. Nếu gặp các dạng vô định khác $0.\infty$, $\infty - \infty$, ta biến đổi để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, bằng cách tách một nhân tử xuống dưới mẫu hay quy đồng để có một phân số.

6 PP Loga hai vế

Khi gặp các giới hạn có dạng $[u(x)]^{v(x)}$, ta gặp các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$. Để khử các dạng vô định này ta áp dụng công thức $u^v = e^{v\ln u}$ với $u > 0, v > 0$ và sử dụng khả năng chuyển qua giới hạn trong số mũ của hàm e^x nghĩa là $\lim\limits_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a} v\ln u}$ hoặc ta gọi $y = u^v$, lấy loga hai vế và áp dụng tính chất liên tục của hàm loga, ta tính được giới hạn của logy, từ đó tìm giới hạn của y.

Ví dụ 6.1. Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2.$$

Ví dụ 6.2. Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Ở đay ta có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Ta chuyển sang dạng mũ:

$I = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln e^x - 1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{xe^x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{xe^x+e^x}} =$ $e^1 = e$.