TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN

http://vnmaths3.wordpress.com

25/10/2009

1 Tính đạo hàm bằng áp dụng trực tiếp công thức

Ta cần chú ý:

$y = f[\varphi(x)] \to y' = f'_{(\varphi)}.\varphi'(x)$; $y = F[f(\varphi(x)) \to y' = F'_f.f'_\varphi.\varphi'(x)]$.

Ví dụ 1.1. $y = sin(lnx)$ $y' = cos(lnx)(lnx)' = \dfrac{cos(lnx)}{x}$.

Ví dụ 1.2. $y = \dfrac{x^2 sinx}{lnx}$ $x > 0, x \neq 1$

$y' = \dfrac{(x^2 sinx)'.lnx - x^2 sinx(lnx)'}{(lnx)^2} = \dfrac{x(sinx + cosx)}{ln^2 x}$.

Ví dụ 1.3. $y = (2x^3 + 5)^4$

Ta kí hiệu $2x^3 + 5 = u$, khi đó $y = u^4$. Theo qui tắc lấy đạo hàm của hàm hợp ta có

$$y' = (u^4)'.(2x^2 + 5)'_x = 4u^3 6x^2 = 24x^2(2x^3 + 5)^3.$$

2 Tính đạo hàm bằng biến đổi, logarit hai vế

Khi tính đạo hàm các hàm có dạng phức tạp ta có thể biến đổi sơ bộ biểu thức của hàm.

- Nếu biểu thức của hàm dưới dấu logarit thì sử dụng các tính chất của logarit để đơn giản biểu thức của hàm.

- Nếu biểu thức của hàm chứa nhiều thừa số thì có thể lấy logarit và sau khi tính đạo hàm cần thực hiện phép mũ hóa.

Ví dụ 2.1. $y = \dfrac{sinx}{cos^2x} + ln\dfrac{1 + sinx}{cosx}$.

Ta biến đổi hàm đã cho: $y = \dfrac{sinx}{cos^2x} + ln(1 + sinx) - lncosx$.

Khi đó $y' = \dfrac{2}{cosx}$

Ví dụ 2.2. $y = x^{x^2}$

Ở đây cơ số và số mũ đều phụ thuộc x. Lấy logarit ta được $lny = x^2lnx$.

Lấy đạo hàm cả hai vế của đẳng thức này theo x. Vì y là hàm của x nên $\ln y$ là hàm hợp của x và $(lny)' = \dfrac{1}{y}.y'$.

Do đó $\dfrac{y'}{y} = x^2\dfrac{1}{x} + 2x.lnx = x(1 + 2lnx)$

$y' = xy(1 + 2lnx) = x^{x^2+1}1 + lnx$.

Ví dụ 2.3. $y = (sinx)^{tgx}$

Ta có $\ln y = tgx. \ln\sin x$,

$\dfrac{y'}{y} = tgx.\dfrac{1}{sinx}.cosx + \dfrac{1}{cos^2x}.lnsinx = 1 + \dfrac{1}{cos^2x}. \ln sinx$

$y' = (sinx)^{tgx}(1 + \frac{1}{cos^2x}.lnsinx)$

3 Lấy đạo hàm các hàm ẩn

Giả sử phương trình $F(x, y) = 0$ xác ịnh y là hàm ẩn của x.

Lấy đạo hàm theo x cả hai vế ương trình $F(x, y) = 0$, ta được phương trình bậc nhất đối với y'. Từ phương trình này dễ dàng tìm được y', tức là được đạo hàm của hàm ẩn.

Ví dụ 3.1. Tìm đạo hàm y'_x từ phương trình $x^2 + y^2 = 4$.

Vì y là hàm của x nên y^2 được xem như hàm hợp của x. Do đó $(y^2)' = 2yy'$. Lấy đạo hàm theo x cả hai vế của phương trình đã cho ta được $2x + 3yy' = 0$, nghĩa là $y' = -\frac{x}{y}$

Ví dụ 3.2. Tìm đạo hàm y'_x từ phương trình $x^3 + lny - x^2e^y$.

Lấy đạo hàm theo x cả hai vế của phương trình ta được

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2e^yy' - 2xe^y$$

từ đó $y' = \frac{(2xye^y - 3x^2)y}{1 - x^2ye^y.}$

4 Lấy các đạo hàm được cho bằng tham số

Nếu hàm y của đối số x được cho bởi các phương trình $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$ thì

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ hay } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ví dụ 4.1. Tìm $y' = \dfrac{dy}{dx}$ nếu $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Ta tìm được $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 3,\ \ \dfrac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$

Do đó $\dfrac{dy}{dx} = 5t^2$.

Ví dụ 4.2. Tìm $y'_x,\ y''_x$ nếu $\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3asin^2t.cost}{-3cos^2tsinx} = -tgx.$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(-tgt) = \dfrac{d(-tgx)/dt}{dx/dt} = \dfrac{1}{3acos^4tsint}.$