Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Mở đầu

Tối ưu hóa là một lĩnh vực toán học nghiên cứu lý thuyết và các thuật toán giải bài toán cực trị.

Nhiều vấn đề thực tế khác nhau dẫn tới việc giải bài toán cực trị sau:

$$f(x) \to \min \tag{1}$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, .., m_1 & (2) \\ h_j(x) = 0, \quad i = 1, .., m_2 & (3) \\ x \in X \subset \mathbb{R} & (4) \end{cases}$$

trong đó $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., m_1; j = 1, 2, ..., m_2)$.

Bài toán $(1) - (4)$ được gọi là bài toán quy hoạch toán học. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, còn các hàm g_i, h_j gọi là các hàm ràng buộc. Tập các vector $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ thỏa mãn các ràng buộc $(2), (3)$ gọi là tập phương án hay miền chấp nhận được của bài toán trên. Phương án x^* thỏa mãn $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi phương án x gọi là phương án tối ưu hay lời giải của bài toán, $f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu.

Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ và các hàm $g_i,\ h_j$ đều là các hàm tuyến tính và $X = \mathbb{R}_n^+$, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính, ngược lại là bài toán quy hoạch phi tuyến. Nếu X là tập rời rạc ta có bài toán quy hoạch rời rạc.

Trong chuyên đề này ta chỉ xét bài toán quy hoạch tuyến tính, trước hết vì nó là mô hình phổ biến trong thực tế, hơn nữa sự phụ thuộc tuyến tính là sự phụ thuộc đơn giản và dễ hiểu. Mặt khác, về lý thuyết ta có thể xấp xỉ với độ chính xác cao một bài toán quy hoạch phi tuyến bằng một dãy các bài toán quy hoạch tuyến tính. Nói cách khác, thuật toán giải bài toán qui hoạch tuyến tính là công cụ quan trọng để giải quyết các bài toán phức tạp hơn.

Lý thuyết quy hoạch tuyến tính bắt đầu phát triển từ năm 1939 khi nhà toán học người Nga Kantorovich đề xuất thuật toán đầu tiên để giải bài toán tối ưu tuyến tính trong một loạt các công trình nghiên cứu về kế hoạch sản xuất. Sau đó, năm 1942 nhà toán học Mỹ Dantzig đã đề xuất phương pháp đơn hình cho quy hoạch tuyến tính mà cho tới nay vẫn là phương pháp đươch sử dụng nhiều nhất và tỏ ra hữu hiệu nhất.

1.2. Một số ví dụ

1.2.1. Bài toán vận tải

Giả sử có m kho hàng kí hiệu $A_1, A_2, ..., A_m$ (các điểm phát) cung cấp cùng một loại mặt hàng nào đó với khối lượng tương ứng $a_1, a_2, ..., a_m$ và n cửa hàng tiêu thụ (các điểm thu) kí hiệu là $B_1, B_2, ..., B_n$ với khối lượng nhu cầu tương ứng $b_1, b_2, ..., b_n$. Để thỏa mãn nhu cầu các điểm thu thì tổng số lượng hàng ở các điểm phát ít nhất phải bằng yêu cầu ở các điểm thu: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \geq \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Biết rằng cước phí vận chuyển một đơn vị hàng (chiếc, tấn,...) từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j là c_{ij} đơn vị tiền. Ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$ gọi là ma trận cước phí. Hãy lập phương án vận chuyển sao cho các điểm thu đều nhận đủ hàng và cước phí vận chuyển là ít nhất.

Lập bài toán: Gọi x_{ij} là đơn vị hàng chuyển từ A_i đến B_j. Tất nhiên $x_{ij} \geq 0$ $(i = 1, .., m, j = 1, .., n)$.

Tổng lượng hàng chuyển từ A_i đến mọi B_j là $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ $(i = 1, .., m)$.

Tổng lượng hàng điểm b_j nhận được từ mọi A_i là $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \ \ (j = 1, .., m)$.

Tổng cước phí phải trả là $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Bài toán đặt ra là: tìm vector $x = x_{ij} \ \ (i = 1, .., m, j = 1, .., n)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, ..., m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, .., n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, .., m, \ j = 1, .., n) \end{cases}$$

1.2.2. Bài toán phân phối vật liệu

Có n loại vật liệu V_i $(i = 1, .., n)$ với khối lượng tượng ứng $b_i \ \ (i = 1, .., n)$ dùng để sản xuất m loại hàng hóa $H_j \ \ (j = 1, .., m)$. Để sản xuất 1 đơn vị hàng H_j cần a_{ij} đơn vị vật liệu $V_i \ \ (i = 1, .., n, \ j = 1, .., m)$. Một đơn vị vật liệu V_i giá d_j đơn vị tiền. Một đơn vị hàng hóa H_j bán được c_j đơn vị tiền. Biết thị trường có thể tiêu thụ không quá k_j đơn vị hàng $H_j \ \ (j = 1, .., m)$. Cần sản xuất mỗi loại hàng H_j bao nhiêu đơn vị để được thu lãi nhiều nhất.

Lập bài toán: Gọi x_j $(j = 1, .., m)$ là số đơn vị hàng H_j cần sản xuất. Khi đó

$0 \leq x_j \leq k_j \ \ (j = 1, ...m)$ (hạn chế về thị trường).

$\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \ \ (i = 1, ...n)$ (hạn chế về vật liệu).

Chi phí để sản xuất một đơn vị H_j là $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}d_i$ và thu được số lãi tương ứng là $l_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}d_i \ (j = 1, .., m)$.

Tổng số lãi thu được $\sum\limits_{j=1}^{m} l_jx_j = \sum\limits_{i=1}^{n} (c_j - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}d_i)$.

Bài toán đặt ra là: Tìm vector $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_i) \to \max$$

và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \ \ (i = 1, ...n) \\ 0 \leq x_j \leq k_j \ \ (j = 1, ...m) \end{cases}$$

1.2.3. Bài toán sản xuất đồng bộ

Cần sản xuất một loại máy gồm n chi tiết C_i $(i = 1, ..., n)$. Mỗi chi tiết có thể đặt sản xuất ở m xí nghiệp khác nhau. Biết rằng trong một đơn vị thời gian, xí nghiệp thứ j có thể sản xuất được a_{ij} chi tiết C_i $(j = 1, .., m; i = 1, .., n)$. Một máy được coi là hoàn chỉnh nếu mọi chi tiết của nó được sản xuất xong. Lập kế hoạch sản xuất cho từng xí nghiệp, bố trí bao nhiêu phần trăm thời gian để sản xuất mỗi chi tiết sao cho số máy hoàn chỉnh được sản xuất ra nhiều nhất.

Lập bài toán: Gọi $x_{ij}(\%)$ là số phần trăm thời gian mà xí nghiệp thứ j dành để sản xuất chi tiết C_i. Rõ ràng $x_{ij} \geq 0$ $(i = 1, .., n, j = 1, .., m)$ và $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1$ $(j = 1, .., m)$. Tổng số chi tiết C_i mà tất cả các xí nghiệp sản xuất được trong thời gian đã định là $N_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$. Số máy hoàn chỉnh được sản xuất là $N = \min\limits_{1 \leq i \leq n} N_i$. Ta có bài toán: Tìm vector $x = (x_{ij})$ $(i = 1, .., n, j = 1, .., m)$ thỏa mãn các điều kiện $x_{ij} \geq 0$ $(i = 1, .., n,\ j = 1, .., m)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1$ $(j = 1, .., m)$ sao cho N đạt lớn nhất.

Đây không phải là bài toán quy hoạch tuyến tính vì

$$N = \min_{1 \leq i \leq n} N_i = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$$

không phải là hàm tuyến tính. Tuy nhiên ta có thể chuyển bài toán trên thành bài toán quy hoạch tuyến tính bằng cách xem N là một biến

Vì $N = \min\limits_{1 \leq i \leq n} N_i$ nên $N_i \geq N$ $(i = 1, .., n)$. Ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Tìm vector $x = (x_{ij}, N)$ $(i = 1, ..., n, j = 1, ..., m)$ sao cho $N \to \max$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geq N \\ x_{ij} \geq 0,\ N \geq 0 \ (i = 1, .., n, j = 1, .., m). \end{cases}$$

1.2.4. Bài toán lập thực đơn

Có n loại thực phẩm T_j $(j = 1, .., n)$. Biết mỗi đơn vị T_j chứa a_{ij} đơn vị chất i $(i = 1, ..m)$ và có giá thành là c_j đơn vị tiền. Hãy lập một thực đơn sao cho bữa ăn phải đảm bảo có ít nhất b_i đơn vị chất j $(i = 1, .., m)$ mà có giá thành rẻ nhất.

Lập bài toán: Gọi x_j là số đơn vị thực phẩm T_j $(j = 1, .., m)$ dùng trong bữa ăn, tất nhiên $x_j \geq 0$ và $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ $(i = 1, .., m)$. Giá thành của bữa ăn là $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$. Bài toán đặt ra là tìm vector $x = (x_1, .., x_n)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, .., n). \end{cases}$$

1.2.5. Bài toán bố trí máy trong sản xuất

Một nhà máy có n loại máy M_j với số lượng tương ứng a_j máy $j = 1, .., n$ cùng có thể sản xuất ra m loại sản phẩm S_i $(i = 1, .., m)$ nhưng với năng suất khác nhau. Biết rằng sau mỗi đơn vị thời gian (ca, tháng, quý, năm,...) mỗi máy M_j sản xuất được a_{ij} đơn vị sản phẩm S_j $(j = 1, .., n, i = 1, ..m)$. Mỗi sản phẩm S_i cho c_i đơn vị tiền lãi $(i = 1, .., m)$.

Kế hoạch cần đảm bảo là sau một đơn vị thời gian phải sản xuất được ít nhất b_i đơn vị sản phẩm S_i $(i = 1, .., m)$. Hãy lập kế hoạch bố trí máy sao cho kế hoạch trên được đảm bảo và nhà máy được thu lãi nhiều nhất.

Lập bài toán: Gọi x_{ij} là số máy M_j dùng để sản xuất sản phẩm S_i thế thì

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, .., m, j = 1, .., n) \ (1) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_j \quad (j = 1, .., n) \qquad\qquad (2) \ \text{Hạn chế về số lượng máy} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \geq b_i \quad (i = 1, .., m) \qquad\qquad (3) \ \text{Đảm bảo kế hoạch} \end{cases}$$

Tổng lãi thu được là $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$. Bài toán đặt ra là hãy tìm vector $x = (x_{ij})$ $(i = 1, .., m, j = 1, .., n)$ thỏa mãn các điều kiện $(1), (2), (3)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$$

đạt lớn nhất

1.3. Bài toán qui hoạch tuyến tính

a. Dạng tổng quát

Tìm vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max) \tag{1.1}$$

với các điều kiện

$$D : \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & (i = 1, .., m_1) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & (i = m_1 + 1, .., m_2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i = m_2 + 1, .., m) \\ x_j \geq 0 & (i = 1, .., n_1) \\ x_j \leq 0 & (i = n_1 + 1, .., n_2) \\ x_j = 0 & (i = n_2 + 1, .., n) \end{cases}$$

Dễ nhận thấy

1. $f(x^*) = \min\{f(x), x \in D\} \Leftrightarrow -f(x^*) = \max\{-f(x), x \in D\}$

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$

3. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \end{cases}$

4. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i; \forall x_{n+i} \geq 0$

5. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i; \forall x_{n+i} \geq 0$

(các x_{n+i} gọi là các biến bù)

Biến x_j không ràng buộc về dấu có thể thay bằng hiệu hai biến không âm

$$x_j = x_j^{'} - x_{n+j}^{'};\ x_j^{'} \geq 0, x_{n+j}^{'} \geq 0$$

Từ các nhận xét trên thấy rằng bất kỳ một bài toán quy hoạch tuyến tính nào cũng có thể đưa về một trong hai dạng sau:

b. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m) \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, ..., n) \end{cases} \tag{I}$$

hay dưới dạng ma trận

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \min \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

trong đó $c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A$ là ma trận cấp $m \times n$

c. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m) \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, ..., n) \end{cases} \tag{II}$$

hay dưới dạng ma trận

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.4. Một số khái niệm

a) Tập hợp lồi

Phần này chỉ trình bày những kết quả cần thiết nhất của giải tích lồi mà ta sẽ dùng để nghiên cứu cấu trúc của tập các phương án chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính.

Định nghĩa 1.4.1. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ gọi là tập lồi nếu lấy 2 điểm bất kỳ $x^{'}, x^{''} \in C$ thì đoạn thẳng $[x^{'}, x^{''}]$ nối hai điểm này hoàn toàn thuộc C.

Vì một điểm x bất kỳ thuộc đoạn thẳng $[x^{'}, x^{''}]$ có thể viết được dưới dạng $x = \alpha x^{'} + (1-\alpha)x^{''}$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$ nên định nghĩa có thể phát biểu như sau:

C là *tập lồi* $\Leftrightarrow \forall x^{'}, x^{''} \in C, \forall \alpha \in [0,1]$ thì $x = \alpha x^{'} + (1-\alpha)x^{''} \in C$.

Ví dụ: - Trong $\mathbb{R}^2$ thì đa giác lồi, hình tròn,... là các tập lồi.

- Trong $\mathbb{R}^3$ thì đa diện lồi, hình cầu,... là các tập lồi.

- Siêu phẳng $H = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i = \beta\}$ là tập lồi trong $\mathbb{R}^n$.

- Các nửa không gian

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq \beta\}$$

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c_j x_i \leq \beta\}$$

là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$.

- Góc dương $\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, i = 1, .., n\}$ là tập lồi

Ta có, giao của các tập lồi là tập lồi.

Tính chất trên không đúng đối phép hợp.

b) Điểm cực biên

Điểm x^0 thuộc tập lồi C được gọi là điểm cực biên của C nếu nó không là điểm trong của bất kỳ đoạn nào nối hai điểm khác nhau của C

Ví dụ: 1. C là các đa giác lồi, đa diện lồi thì các đỉnh của nó là các điểm cực biên, các điểm khác không là điểm cực biên.

2. C là hình tròn (hình cầu) thì các điểm nằm trên đường tròn (mặt cầu) đều là các điểm cực biên.

Lưu ý

1. Cần phân biệt điểm cực biên và điểm biên. Ví dụ nếu C là một đa giác lồi thì các điểm nằm trên cạnh của nó và không là đỉnh đều là các điểm biên nhưng không là điểm cực biên.

2. Có những tập lồi không có điểm cực biên, ví dụ: một mặt phẳng, nửa không gian,...

Định nghĩa 1.4.2. Một tổ hợp lồi của các điểm $x^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, ..., m)$ là điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$$

trong đó $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, .., m)$ $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$

Nếu có hai điểm $x^{'}, x^{''} \in \mathbb{R}^n$ thì điểm $x = \alpha x^{'} + (1 - \alpha)x^{''}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ là tổ hợp lồi của hai điểm $x^{'}, x^{''}$. Vậy tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của hai điểm $x^{'}, x^{''}$ chính là đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Định lý 1.4.1. *Tập C là lồi khi và chỉ khi chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm thuộc C, tức là $\forall x^i \in C, \forall \alpha_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$ và $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ thì $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^i \in C$.*

Bổ đề 1.4.1. *Tập M gồm mọi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm đã cho trước $x^1, x^2, ..., x^m$ là tập lồi*

Định nghĩa 1.4.3. Tập M gồm mọi tổ hợp lồi của một số hữu hạn các điểm cho trước $x^1, x^2, ..., x^m$ gọi là đa diện lồi sinh bởi hệ điểm đã cho.

Kí hiệu: $M = conv\{x^1, x^2, ..., x^m\}$

Theo bổ đề 1.1, đa diện lồi là một tập lồi. Tuy nhiên không phải tập lồi nào cũng là đa diện lồi, chẳng hạn hình tròn là một tập lồi nhưng không phải là đa diện lồi.

Ví dụ về đa diện lồi:

- Đa diện lồi M_2 sinh bởi hai điểm x^1, x^2 là đoạn thẳng nối hai điểm đó. Hai điểm x^1, x^2 là các điểm cực biên, các điểm khác đều là các điểm biên.

- Đa điện lồi M_3 sinh bởi ba điểm x^1, x^2, x^3 không thẳng hàng trên mặt phẳng là một tam giác. Ba điểm x^1, x^2, x^3 là các điểm cực biên (đỉnh) các điểm khác đều không là điểm cực biên.

Định lý sau về biểu diễn đa diện lồi cho thấy rõ hơn về cấu trúc của nó.

Định lý 1.4.2. *Nếu M là đa diện lồi thì nó có điểm cực biên. Số điểm cực biên của M là hữu hạn và mọi điểm của M đều là tổ hợp lồi của các điểm cực biên của nó.*

Về mặt hình học, ta thấy đa diện lồi là một tập hợp lồi giới nội và là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Người ta đã chứng minh được định lý sau đây (Hoàng Tụy, Asmanov):

Định lý 1.4.3. *Xét tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ trong đó A là ma trận cấp $m \times n, b \in \mathbb{R}^m$. Nếu $M \neq \emptyset$ và giới nội thì M là một đa diện lồi.*

Định nghĩa 1.4.4. Tập $K \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một nón có mũi tại O nếu $x \in K$ thì $\forall \geq 0$ có $\lambda x \in K$. Nếu nón K là một tập lồi thì K được gọi là một nón lồi (có mũi tại O).

Định lý 1.4.4. *K là một nón lồi khi và chỉ khi K chứa mọi tổ hợp tuyến tính không âm của một số hữu hạn bất kỳ các điểm thuộc K.*

Hệ quả 1.4.1. *Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính với các hệ số không âm của vector $x^1, x^2, ..., x^k$ là một nón lồi.*

Tập hợp đó được gọi là một nón lồi đa diện sinh bởi $x^1, x^2, ..., x^k$ và được kí hiệu $K = cone\{x^1, x^2, ..., x^k\}$.

1.5. Cấu trúc miền ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính

1.5.1. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính

Hệ ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính có thể viết thành một hệ bất phương trình tuyến tính. Tập hợp các phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính đó. Ta biết rằng nếu tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình là không rỗng và giới nội thì nó là đa diện lồi (Định lý 1.4.3). Phần này giới thiệu cấu trúc của tập hợp nghiệm trong trường hợp không có giả thiết giới nội.

Ta thừa nhận các định lý sau

Định lý 1.5.1. *Tập $K = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geq 0\}$ là nón lồi đa diện.*

Kí hiệu $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$. D là tập nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính. Ta thừa nhận định lý sau:

Định lý 1.5.2. *Giả sử $D \neq \emptyset$ thì:*

j) D có điểm cực biên $\Leftrightarrow rankA = n$.

ii) Nếu $rankA = n$ thì D=M+K, trong đó M là đa diện lồi sinh bởi các điểm cực biên của D còn K là nón đa diện lồi đa diện $K = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geq 0\}$.

K gọi là nón các hướng vô hạn của D.

Ta thấy có sự tương tự giữa cấu trúc của tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ và tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính $Ax \geq b$. Nhớ rằng nếu S là tập hợp nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ thì S biểu diễn dưới dạng

$S = x^0 + L$ trong đó x^0 là một nghiệm riêng của hệ còn L là nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Hệ quả 1.5.1. *Nếu* $rankA = n$ *thì* $\forall x \in D$ *đều viết được dưới dạng* $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^i + \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j x^j$ *trong đó* x^i $(i = 1,..,m)$ *là các điểm cực biên của D;* $\alpha_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ y^j$ $(j = 1,..,k)$ *là các hướng vô hạn của D,* $\beta_j \geq 0$.

1.5.2. Phương án cực biên và phương án cực biên tối ưu

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) = c^t x \to \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{I}$$

Kí hiệu $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

Đặt

$$A_E = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ E \end{pmatrix},\ b_E = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

thì $D = \{x \in \mathbb{R}^n : A_E \geq b_E\}$.

Rõ ràng luôn có $rankA_E = n$. Áp dụng định lý 1.5.2 ta thấy D có phương án cực biên. Khi đó nếu hàm mục tiêu bị chặn dưới trong D thì D có phương án tối ưu.

Thật vậy: theo hệ quả trên $\forall x \in D$ đều viết được $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^i + \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j y^i$ trong đó x^i là các điểm cực biên của $D, y^j \in K$ là các hướng vô hạn của $D, \alpha_j \geq 0, \sum \alpha_i = 1,\ \beta_j \geq 0$.

Trong m điểm cực biên $x^1, x^2, ..., x^m$ phải có điểm mà giá trị hàm mục tiêu tại đó nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là điểm x^1 :

$$f(x^1) = \min\{f(x^i), i = 1, 2, ..., m\}$$

ta chứng minh x^1 là phương án tối ưu.

a) Trước hết thấy rằng $\forall j = 1, 2, ..., k$ đều có $f(y^j) \leq 0$ vì nếu $\exists j_0$ để $f(y^{j_0}) < 0$ thì nếu lấy $\beta_j = 0\ \forall j \neq j_0$ còn $\beta_{j_0} \to \infty$ thì $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i) + \beta_{j_0} f(y^{j_0}) \to \infty$, trái giả thiết hàm mục tiêu bị chặn dưới.

b) $\forall x \in D$ có $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i) + \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j f(y^j) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^1) = f(x^1) \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = f(x^1)$.

$\forall x \in D$ thì $f(x) \geq f(x^1)$. Vậy x^1 là phương án tối ưu.

Ta có khẳng định sau: Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án thì có phương án cực biên, và nếu hàm mục tiêu bị chặn dưới trong D thì có phương án cực biên tối ưu.

1.5.3. Điều kiện cần và đủ để một phương án là cực biên

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (I) :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Kí hiệu $a^1, a^2, ..., a^n$ là các cột của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Không mất tính tổng quát, luôn có thể giả thiết $rankA = rank\{a^1, a^2, ..., a^n\} = m$ vì nếu có phương trình nào trong hệ $Ax = b$ biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác thì có thể bỏ đi.

Định lý 1.5.3. *Điều kiện cần và đủ để $x \in D$ là một phương án cực biên là hệ các vector cột ứng với các thành phần dương của x độc lập tuyến tính.*

Tức là: Ký hiệu $J^+(x) = \{j : x_j \geq 0\}$ thì $x \in D$ là cực biên $\Leftrightarrow \{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Điều kiện cần: Giả sử $x \in D$ là điểm cực biên. Cần chứng minh hệ vector $\{a^j, j \in J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính.

Để đơn giản, giả sử $J^+(x) = \{1, 2, ..., k\}$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử hệ $\{a^1, a^2, ..., a^k\}$ phụ thuộc tuyến tính, suy ra tồn tại các số $z_1, z_2, ..., z_k$ không đồng thời bằng 0 để $\sum\limits_{j=1}^{k} z_j a^j = 0$. Đặt $z = (z_1, z_2, ..., z_k, 0, ...0)$ thì $Az = 0$.

Lập các vector

$$x' = x + \lambda z;\ x'' = x - \lambda z \Rightarrow Ax' = Ax'' = b \text{ (vì } Az = 0).$$

Lấy $\lambda > 0$ đủ bé sao cho $x^{'} \geq 0, x^{''} \geq 0$ thì $x^{'}, x^{''} \in D$ mà từ giả thiết $x^{'} = x + \lambda z$; $x^{''} = x - \lambda z \Rightarrow x = \frac{1}{2}x^{'} + \frac{1}{2}x^{''}$ suy ra trái với giả thiết x là phương án cực biên.

Điều kiện đủ. Giả sử hệ vector $\{a^j,\ j \in J^+(x)\}$ là độc lập tuyến tính. Cần chứng minh x là một phương án cực biên.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử x không phải là phương án cực biên, suy ra $\exists x^{'}, x^{''} \in D$ sao cho $x = \dfrac{x^{'} + x^{''}}{2}$. Ta có $(n-k)$ thành phần cuối của $x^{'}, x^{''}$ cũng phải bằng 0, vì $x^{'}, x^{''} \in D$ nghĩa là các thành phần cuối của chúng đều không âm, không xẩy ra tình huống $(n-k)$ thành phần cuối của $x^{'}, x^{''}$ đối nhau.

Vậy

$$\sum_{j=1}^{k} x_j a^j = \sum_{j=1}^{k} x_j^{'} a^j = \sum_{j=1}^{k} x_j^{''} a^j$$

vì $Ax^{'} = Ax^{''} = Ax = b$.

Nhưng hệ $\{a^j,\ J^+(x)\}$ độc lập tuyến tính nên suy ra

$$x_j = x_j^{'} = x_j^{''}\ (j = 1, 2, ..., k)$$

$$x_j = x_j^{'} = x_j^{''} = 0\ (j = k+1, ..., n)$$

hay $x_j = x_j^{'} = x_j^{''}$. Điều này mâu thuẫn với $x_j^{'} \neq x_j^{''}$. □

Ví dụ 1.5.1. Giả sử miền ràng buộc D của bài toán xác định như sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ta thấy $x = (1, 0, 1, 3)^t$ là một phương án của bài toán và $J^+(x) = \{1, 3, 4\}$ các cột $\{a^j, j \in J^+(x)\}$ tương ứng là: $a_1 = (3, 2, 2)^t, a_3 = (2, 3, 1)^t, a_4 = (0, 0, 2)^t$ chúng lập thành một hệ độc lập tuyến tính vậy $x = (1, 0, 1, 3)^t$ là một phương án cực biên của bài toán.

1.5.4. Cơ sở của một phương án cực biên

Giả sử $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ là một phương án cực biên, $rankA = m$ và $CardJ^+k$. Hệ $\{a^j,\ j \in J^+(x)\}$ là hệ gồm k vector độc lập tuyến tính, suy ra $k \leq m$.

Nếu $k < m$ thì ta luôn bổ sung thêm $(m-k)$ véc tơ cột khác nhau của A để được một hệ véc tơ độc lập tuyến tính tối đại gồm đủ m véc tơ nghĩa là ta tìm được tập gồm đủ m chỉ số $J = \{j_1, j_2, ..., j_m\}, J \supset J^+$ sao cho hệ $\{a^j : j \in J\}$ là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.5.1. Ta gọi hệ véc tơ $\{a^j : j \in J\}$ nói trên là cơ sở của phương án cực biên x. Đôi khi gọi tắt tập chỉ số J là cơ sở của x.

Định nghĩa 1.5.2. Một phương án cực biên là không suy biến nếu có đúng m thành phần dương ($CardJ^+ = m$), trường hợp ngược lại gọi là suy biến.

Bài toán quy hoạch tuyến tính gọi là không suy biến nếu mọi phương án cực biên của nó đều không suy biến.

Rõ ràng nếu phương án cực biên x không suy biến thì có một cơ sở duy nhất, đó là hệ m véc tơ độc lập tuyến tính $\{a^j : j \in J\}$. Nếu phương án cực biên x là suy biến thì có thể tìm được nhiều cơ sở khác nhau tùy thuộc vào cách bổ sung thêm $(m-k)$ véc tơ cột của A để đủ một hệ gồm m véc tơ độc lập tuyến tính. Tuy nhiên mỗi cơ sở gồm m véc tơ độc lập tuyến tính lấy từ n cột của A nên số cơ sở nhỏ hơn hay bằng C_n^m, mà số các phương án cực biên nhỏ hơn hay bằng số các cơ sở. Vậy đối với bài toán quy hoạch tuyến tính, số các cơ sở của tất cả các phương án cực biên là hữu hạn, nói riêng, số các phương án cực biên là hữu hạn.