Chương 2

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.1. Cơ sở của phương pháp đơn hình

2.1.1. Tư tưởng của phương pháp đơn hình

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \min \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{I}$$

trong đó $c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A$ là ma trận cấp $m \times n$. Giả thiết rằng hạng $A = m$ (m là số ràng buộc của bài toán).

Đã biết rằng:

- Nếu bài toán có phương án thì có phương án cực biên.

- Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

- Số phương án cực biên là hữu hạn.

Do đó ta có thể tìm một phương án tối ưu (hay một lời giải của bài toán) trong tập hợp các phương án cực biên. Tập hợp này là hữu hạn. Vì vậy Dantzig đề xuất một thuật toán như sau (gọi là thuật toán đơn hình):

Xuất phát từ một phương án cực biên x^0. Kiểm tra xem x^0 có phải là phương án tối ưu hay chưa. Nếu x^0 chưa phải là phương án tối ưu thì tìm cách cải tiến nó để được một phương án cực biên khác là x^1 tốt hơn theo nghĩa $f(x^1) < f(x^0)$. Quá trình này lặp lại nhiều lần. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước lặp ta phải tìm thấy phương án cực biên tối ưu.

Để thực hiện thuật toán đề ra ở trên, ta cần phải làm rõ hai vấn đề sau:

1. Làm thế nào để biết một phương án đã cho là tối ưu hay chưa tức là cần tìm được "dấu hiệu tối ưu".

2. Làm thế nào để từ một phương án cực biên chưa tối ưu tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn nó.

Nội dung tiếp sẽ trả lời cho câu hỏi trên.

2.1.2. Biểu diễn qua cơ sở. Dấu hiệu tối ưu

Giả sử có phương án cực biên x^0 với cơ sở J (tức là hệ véc tơ cột độc lập tuyến tính $\{a^j, j \in J\}$ và $J \supset J^+(x) = \{j, x_j > 0\}$). Ta có

$$Ax^0 = b \text{ hay } b = \sum_{j=1}^{n} x^0 a^j = \sum_{j \in J} x_j^0 a^j \tag{2.1}$$

(vì $x_j^0 = 0 \;\; \forall j \notin J$). Với mỗi $k \notin J$, ta biểu diễn véc tơ a^k qua các véc tơ cơ sở $\{a^j, \;\; j \in J\}$:

$$a^k = \sum_{j \in J} z_{jk} a^j \;\; (\forall k \notin J).$$

Giả sử $x \in D$ là một phương án bất kỳ. Ta có

$$\begin{aligned} b = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j &= \sum_{j \in J} x_j a^j + \sum_{k \notin J} x_k a^k = \sum_{j \in J} x_j a^j + \sum_{k \notin J} x^k \sum_{j \in J} z_{jk} a^j \\ &= \sum_{j \in J} (x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk}) a^j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vì $\{a^j, \;\; j \in J\}$ độc lập tuyến tính nên từ (2.1) và (2.2) suy ra

$$x_j^0 = x_j + \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \;\; (\forall j \in J)$$

hay

$$\boxed{x_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \;\;\; \forall j \in J} \tag{2.3}$$

Ta gọi (2.3) là khai triển của một phương án bất kỳ qua cơ sở J. Lại có:

$$f(x) = c^t x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j\in J} c_j x_j + \sum_{k\notin J} c_k x_k$$

Thay (2.3) vào được

$$f(x) = \sum_{j\in J}(x_j^0 - \sum_{k\notin J} z_{jk}x_k)c_j + \sum_{k\notin J} c_k x_k = \sum_{j\in J} c_j x_j^0 - \sum_{j\notin J}(\sum_{j\in J} z_{jk}c_j - c_k)x_k.$$

Kí hiệu

$$\boxed{\Delta_k = \sum_{j\in J} z_{jk}c_j - c_k \ \ (k\notin J)}$$

gọi là ước lượng của véc tơ cột a_k theo cơ sở J và

$$f(x) = f(x^0) - \sum_{k\notin J} \Delta_k x_k. \tag{2.4}$$

Nhận xét: do $x \geq 0$ nên nếu $k \notin J, \Delta_k \leq 0$ thì $f(x) \geq f(x^0),\ \forall x \in D$ do đó ta có dấu hiệu tối ưu sau đây:

$\boxed{\text{Phương án cực biên } x^0 \text{ với cơ sở J là phương án tối ưu thì } \Delta_k \leq 0,\ \forall k \notin J.}$

2.1.3. Tìm phương án cực biên mới tốt hơn-Công thức đổi cơ sở

Giả sử x^0 với cơ sở J là một phương án cực biên nhưng chưa phải là phương án tối ưu, khi đó $\exists k \notin J$ sao cho $\Delta_k \geq 0$. Giả sử s là một chỉ số trong các chỉ số nói trên: $s \notin J,\ \Delta_s > 0$.

Theo thuật toán đơn hình ta cần cải tiến x^0 để nhận được một phương án cực biên mới x^1 tốt hơn. Nhằm mục đích kế thừa tận dụng những kết quả ở bước trước ta sẽ tìm phương án cực biên mới x^1 với cơ sở J^1 chỉ khác J một véc tơ: $J^1 = (J\backslash r \cup s)$, nghĩa là ta sẽ đưa véc tơ a^s vào cơ sở thay thế cho véc tơ a^r khác bị loại khỏi cơ sở J. Các véc tơ a^r và a^s được lựa chọn sao cho x^1 tốt hơn x^0.

Vì mọi thành phần ngoài cơ sở của phương án cực biên đều bằng 0, do đó phương án cực biên mới x^1 có cơ sở $J^1 = (J\backslash r \cup s)$ là

$$x_k^1 = \begin{cases} 0 \ \text{ với } k \notin J,\, k \neq s \ \text{ (tức là } k \notin J^1) \\ \theta \ \text{ với } k = s \end{cases} \tag{2.5}$$

trong đó θ là một số dương sẽ được xác định sau sao cho x^1 là một phương án cực biên

Thay (2.5) vào (2.3) ta được

$$x_j^1 = x_j^0 - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k^1 = x_j^0 - \theta z_{js} \ (\forall j \in J)$$

hoặc viết dưới dạng véc tơ $x^1 = x^0 - \theta z^s$. Tóm lại:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 \ \text{ với } j \notin J, j \neq s \\ \theta \ \text{ với } j = s \\ x_j^0 - \theta z_{js} \ \text{ với } j \in J. \end{cases} \tag{2.6}$$

Cần xác định số dương θ để x^1 trước hết là một phương án (thỏa mãn những ràng buộc $Ax = b, x \geq 0$)

$Ax^1 = \sum\limits_{j \in J} x_j^1 a^j + \sum\limits_{j \notin J} x_j^1 a^j = \sum\limits_{j \in J} (x_j^0 - \theta z_{js}) a^j + \theta a^s = \sum\limits_{j \in J} x_j^0 a^j - \theta \sum\limits_{j \in J} z_{js} a^j + \theta a^s = b - \theta a^s + \theta a^s = b$,

nghĩa là $\forall \theta$ thì ràng buộc thứ nhất luôn thỏa mãn.

Vậy chỉ cần chọn θ sao cho $x^1 \geq 0$. Có hai trường hợp xẩy ra:

Trường hợp a) Nếu $z_{js} \leq 0 \ \forall j \in J \Rightarrow x^1 \geq 0 \ \forall \theta > 0$ thì x^1 là phương án của bài toán, nhưng do $\Delta_s > 0$:

$f(x^1) = f(x^0) - \sum\limits_{k \notin J} \Delta_k x_k^1 = f(x^0) - \Delta_s \theta \to -\infty \ (+\infty)$.

Như vậy, hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên miền ràng buộc. Khi đó bài toán không có lời giải hữu hạn.

Nếu $\exists k \notin J$, $\Delta_k > 0$ mà $z_{js} \leq 0 \ \forall j \in J$ thì $f(x) \to -\infty$.

Trường hợp b) Nếu $\exists j \in J$ để $z_{js} > 0$, khi đó theo (2.6) số θ không thể lớn tùy ý, nó phải thỏa mãn $x_j^0 - \theta z_{js} \geq 0 \ \forall j \in J$ mà z_{js} 0. Giá trị θ lớn nhất chỉ có thể bằng

$$\min\{\frac{x_j^0}{z_{js}} : \ j \in J \text{ mà } z_{js} > 0\}$$

vượt qua giá trị đó sẽ có một trong các $(x_j^0 - \theta z_{js}) < 0$ và x^1 sẽ vượt khỏi miền ràng buộc.

Giả sử cực tiểu trên đạt tại $j = r$. Lấy $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}}$ thay vào (2.6) ta được

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 \ j \notin J, j \neq s \\ \dfrac{x_j^0}{z_{rs}}, \ j = s \\ x_j^0 \dfrac{x_r^0}{z_{rs}}, \ j \in J. \end{cases} \tag{2.7}$$

$$f(x^1) = f(x^0) - \Delta_s \frac{x_r^0}{z_{rs}} \tag{2.8}$$

Phương án x^1 nhận được ở (2.7) thật sự tốt hơn x^0 nếu $\dfrac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$. Điều này thấy rõ từ (2.8).

Định lý 2.1.1. *Phương án x^1 được xác định theo công thức (2.7) là phương án cực biên với cơ sở $J^1 = (J\backslash r) \cup s$.*

Chứng minh. Theo (2.7) suy ra $x_r^1 = 0$ nên $J^+(x^1) \subseteq J^1$. Ta cần chứng minh hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^1\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử $\sum\limits_{j\in J^1} \alpha_j x^j = 0$ ta cần chứng minh $\alpha_j = 0,\ \forall j \in J^1$. Ta có:

$0 = \sum\limits_{j\in J^1} \alpha_j a^j = \sum\limits_{j\in J, j\neq r} \alpha_j a^j + \alpha_s a^s = \sum\limits_{j\in J, j\neq r} \alpha_j a^j + \alpha_s \sum\limits_{j\in J} z_{js} a^j = \sum\limits_{j\in J, j\neq r} (\alpha_j - \alpha_s z_{js}) a^j + \alpha_s z_{rs} a^r.$

Vì hệ véc tơ $\{a^j,\ j \in J\}$ độc lập tuyến tính, nên suy ra

$$\begin{cases} \alpha_j - \alpha_s z_{js} = 0,\ \forall j \in J,\ j \neq r \\ \alpha_s z_{rs} = 0 \end{cases}$$

Vì $z_{rs} > 0$ nên suy ra $\alpha_s = 0$, do đó $\alpha_j = 0$ $(j \in J, j \neq r)$. Vậy $\alpha_j = 0\ \forall j \in J^1 = \{J\backslash r\} \cup s$

Vì $J^+(x^1) \supset J^1$ nên hệ véc tơ $\{a^j, j \in J^+(x^1)\}$ độc lập tuyến tính, do đó x^1 là phương án cực biên và J^1 là cơ sở của phương án cực biên x^1. Định lý được chứng minh. □

Các công thức (2.7), (2.8) cho ta các thành phần của phương án cực biên mới x^1 cùng với giá trị hàm mục tiêu $f(x^1)$ thông qua các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k trong cơ sở J. Để có thể tiến hành các bước tiếp theo ta cần xác định các đại lượng tương ứng z_{jk}^1 và Δ_k^1 trong cơ sở J^1. Theo định nghĩa z_{jk} và z_{jk}^1 là các hệ số khai triển của véc tơ a^k tương ứng với cơ sở J, J^1.

$$a^k = \sum_{j\in J} z_{jk} a^j = \sum_{j\in J^1} x_{jk} a^j \ (J^1 = \{J\backslash r\} \cup s) \tag{*}$$

$$\sum_{j\in J} z_{jk} a^j = \sum_{j\in J} z_{jk} a^j = \sum_{j\in J, j\neq r} z_{jk} a^j + z_{rk} a^r. \tag{**}$$

Từ $a^s = \sum\limits_{j\in J} z_{js} a^j = \sum\limits_{j\in J, j\neq r} a^j z_{js} + z_{rs} a^r$ vì $z_{rs} > 0$ ta có $a^r = \dfrac{1}{z_{rs}}(a^s - \sum\limits_{j\in J, j\neq r} z_{js} a^j)$. Thay vào $(**)$ ta được:

$$\sum_{j\in J} z_{jk}a^j = \sum_{j\in J, j\neq r} z_{jk}a^j + \frac{z_{rk}}{z_r s}(a^s - \sum_{j\in J, j\neq r} z_{js}a^j)$$
$$= \sum_{j\in J, j\neq r}(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js})a^j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}a^s. \qquad (***)$$

Vì $\{a^j, j\in J\}$ độc lập tuyến tính nên từ $(*)$ và $(**)$ suy ra:

$$z^1_{jk} = \begin{cases} \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}} \text{ với } \ j = s \\ z_{jk} - \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js} \text{ với } \ j\in J, j\neq r \end{cases} \qquad (2.9)$$

$\Delta^1_k = \sum_{j\in J^1} z^1_{jk}c_j - c_k = \sum_{j\in J, j\neq r}(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js})c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}c_s - c_k = \sum_{j\in J}(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js})c_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}c_s - c_k$ (vì với $j = r$ thì $(z_jk - \frac{z_r k}{z_{rs}}z_{js}) = 0) = (\sum_{j\in J} z_{ik}c_j - c_k) - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\sum_{j\in J}(z_{js}c_j - c_s) = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Delta_s$.

Vậy

$$\boxed{\Delta^1_k = \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Delta_s} \qquad (2.10)$$

Các công thức $(2.7), (2.8), (2.9), (2.10)$ gọi là công thức đổi cơ sở từ cơ sở J sang cơ sở $J^1 = (J\backslash r)\cup s$. Chúng cho phép dựa vào kết quả bước trước để tìm tất cả các yếu tố cần thiết cho việc thực hiện bước tiếp theo của thủ tục đơn hình.

2.2. Thủ tục đơn hình

2.2.1. Các bước của thủ tục đơn hình

- Bước xuất phát: Tìm một phương án cực biên x^0 và cơ sở J tương ứng. Tính các hệ số khai triển z_{jk} và các ước lượng Δ_k.
- Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu:

  a) Nếu $\Delta_k \le 0\ \forall k\notin J$ thì x^0 là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc

  b) Nếu $\exists\Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 2.

- Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu vô hạn: Với mỗi $k \notin J$ mà $\Delta > 0$ thì kiểm tra các hệ số khai triển z_{jk} của cột a^k tương ứng.:

  a) Nếu có một $\Delta_k > 0$ mà tất cả $z_{jk} \leq 0 \; \forall j \in J$ thì kết luận hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc. Bài toán không có lời giải hữu hạn. Thuật toán kết thúc.

  b) Trái lại nếu $\forall k \notin J$ mà $\Delta_k > 0$ đều tồn tại ít nhất một hệ số $z_{jk} > 0$ thì tiến hành tìm phương án cực biên mới tốt hơn với cơ sở $J^1 = (J \backslash r) \cup s$ theo quy tắc sau:

- Bước 3:

  - Chọn a^s đưa vào cơ sở: có thể chọn bất kỳ $s \notin J$ mà ước lượng $\Delta_s > 0$. Thông thường chọn $s \notin J$ theo quy tắc:

  $$\Delta_s = \max\{\Delta_k > 0, \; k \notin J\}$$

  (Vì khi đó hàm số giảm nhanh nhất)

  - Chọn véc tơ a^r đưa ra khỏi cơ sở theo quy tắc:

  $$\theta = \frac{x_r^0}{x_{rs}} = \min\{\frac{x_r^0}{x_{rs}}, \; z_{js} > 0\}.$$

- Bước 4: Tính các $x_j^1, f(x^1), \Delta_k^1, z_{jk}^1$ trong cơ sở mới $J^1 = (J \backslash r) \cup s$ các công thức $(2.7), (2.8), (2.9), (2.10)$. Quay lại bước 1.

2.2.2. Tính hữu hạn của thuật toán

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án và không suy biến thì sau hữu hạn bước lặp theo thủ tục đơn hình ta sẽ tìm thấy phương án tối ưu hoặc phát hiện ra bài toán có hàm mục tiêu giảm vô hạn hay bài toán không có lời giải hữu hạn.

Thật vậy, vì bài toán không suy biến nên $x_j^0 > 0 \; \forall j \in J$ nên $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} > 0$ suy ra $x^1 \neq x^0$, $f(x^1) < f(x^0)$ nghĩa là x^1 thực sự tốt hơn x^0. Sau mỗi bước lặp, nếu không xẩy ra trường hợp 2a) thì ta luôn tìm được một phương án mới thực sự tốt hơn phương án cũ, tức là không bao giờ trở lại phương án đã đi qua. Vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau hữu hạn bước lặp ta phải tìm được phương án cực biên tối ưu.

2.2.3. Bảng đơn hình

Để thuật tiện cho việc tính toán theo thủ tục đơn hình người ta sắp xếp các số liệu thành một bảng gọi là bảng đơn hình dưới đây (Bảng 2.1):

Cơ sở J	c_j	Phương án x_j	1 2 ... k ... n c_1 c_2 ... c_k ... c_n
J_1	c_{j1}	x_{j1}	$z_{j_1 1}$ $z_{j_1 2}$ ... $z_{j_1 k}$ ... $z_{j_1 n}$
J_2	c_{j2}	x_{j2}	$z_{j_2 1}$ $z_{j_2 2}$ ... $z_{j_2 k}$ ... $z_{j_2 n}$
.	.	.	.
.	.	.	.
J_m	c_{jm}	x_{jm}	$z_{j_m 1}$ $z_{j_m 2}$ ... $z_{j_m k}$ ... $z_{j_m n}$
		f(x)	Δ_1 Δ_2 ... Δ_k ... Δ_n

Lưu ý phần bảng dành cho các hệ số khai triển z_jk :

- Cột ứng với các $j \in J$ sẽ là các véc tơ đơn vị với số 1 nằm trên dòng với chỉ số j.

- Với $k \notin J$ thì cột k của bảng đơn hình là hệ số khai triển của cột a^k của ma trận A theo cơ sở J. Ta kí hiệu cột này là z^k nghĩa là $a^k = A_j z^k$ hay $z^k = A_j^{-1} a^k$, ở đây A_j là ma trận có các cột $a^j, i \in J$. Ma trận A_j gọi là ma trận cơ sở. Nếu ma trận A có m cột là các véc tơ đơn vị và ta chọn chúng làm cơ sở xuất phát, thì ma trận cơ sở A_j là ma trận đơn vị, khi đó $z^k = a^k (k = 1, 2, ..., n)$ và phần bảng dành cho các hệ số khai triển z_{jk} trở thành ma trận chính A.

- Dòng ước lượng: là dòng cuối cùng của bảng.

- Giá trị hàm mục tiêu: $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum\limits_{j \in J} c_j x_j$ (vì $x_j = 0\ \forall j \notin J$) $\Rightarrow$ $f(x) = c_j^t x_j$.

- Ước lượng $\Delta_k = \sum\limits_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k = c_j^t z^k - c_k$. (Lưu ý rằng: $\Delta_j = 0\ \forall j \in J$).

2.2.4. Thủ tục đơn hình trên bảng

- Bước 1: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu: $\Delta_k \leq 0\ \forall k$.

  - Nếu $\Delta_k \leq 0\ \forall k \Longrightarrow$ Phương án x^0 đang xét là phương án tối ưu.

  - Nếu $\exists \Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 2.

- Bước 2: (Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: có $\Delta_k > 0$ và cột tương ứng gồm toàn các phần tử không dương $z_{jk} \leq 0\ \forall j \in J$)

  - Nếu có $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \leq 0 \forall j \in J$ thì bài toán không có phương án tối ưu (hữu hạn) vì hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc.

  - Nếu $\forall \Delta_k > 0, \exists j \in J$ để $z_{jk} > 0$ thì chuyển sang bước 3.

- Bước 3: (Xác định cột xoay, dòng xoay, phần tử trục).

  \- Chọn chỉ số $s : \Delta_s = \max\{\Delta_k, \Delta_k > 0\}$, đánh dấu cột s là *cột xoay*.

  \- Tìm chỉ số r đạt min $\theta = \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} = \min\{\dfrac{x_j^0}{z_{js}} : z_{js} > 0\}$ đánh dấu r là *dòng xoay*.

  \- Phần tử z_{rs} nằm trên dòng xoay và cột xoay gọi là *phần tử trục*.

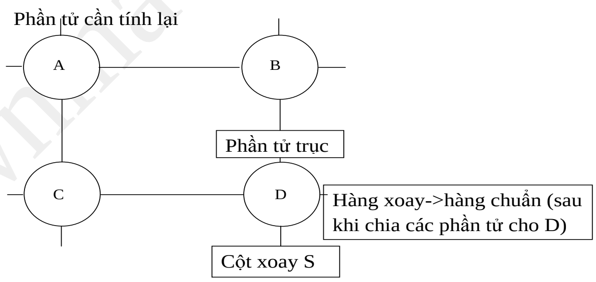
- Bước 4: Tiến hành các tính toán theo các công thức đổi cơ sở ((2.7), (2.8), (2.9), (2.10)). Ghi nhận các kết quả trong một bảng mới. Quay về bước 1.

  Nhận thấy các công thức đổi cơ sở (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) để tính $x_j, z_{jk}, f(x), \Delta_k$ tương tự như nhau. Do đó để nhận được bảng đơn hình mới từ bảng đơn hình cũ ta làm như sau:

  \- Thay x_r bằng x_s, c_r bằng c_s.

  \- Chia các phần tử trên hàng xoay (hàng r) cho phần tử trục z_{rs} ta được hàng r mới gọi là hàng chuẩn.

  \- Mỗi phần tử khác ngoài hàng xoay trừ đi tích của phần tử cùng hàng với nó trên trục xoay với phần tử cùng cột với nó trên hàng chuẩn được phần tử cùng vị trí trong bảng đơn hình mới.



Hình 2.1:

$$\boxed{A^1 = A - \frac{C}{D}B}$$

Ví dụ 2.2.1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 & = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 & = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 & = 9 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, .., 6) \end{cases}$$

Chọn cơ sở xuất phát $J = \{1, 2, 3\}$. A_j là ma trận đơn vị, do đó ta có ngay bảng đơn hình xuất phát sau (bảng 2.2):

J	c_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			1	-1	0	-2	2	-3
1	1	2	1	0	0	$\boxed{1}$	1	-1
2	-1	12	0	1	0	1	0	1
3	0	9	0	0	1	2	4	3
		-10	0	0	0	2	-1	1

Các bước của thủ tục đơn hình:

+ Có $\Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0$. Dấu hiệu tối ưu chưa thỏa mãn, chuyển sang bước 2.

Trên các cột 4 và cột 6 (có $\Delta_k > 0$) không nhất thiết tất cả $z_{jk} \leq 0$ ($\forall j \in J$) trường hợp bước 2a) không xẩy ra

+ Tiến hành đổi cơ sở:

Chọn chỉ số s : $\Delta_4 = \max\{\Delta_4 = 2, \Delta_6 = 1\}$. Chọn cột 4 làm cột xoay (đưa a^4 vào cơ sở).

Chọn chỉ số r : $\theta = \min\{\frac{2}{1}, \frac{12}{1}, \frac{9}{1}\} = \frac{2}{1} = \frac{x_1}{z_{14}} \to r = 1$ chọn hàng 1 làm hàng xoay (đưa a^1 khỏi cơ sở). Phần tử trục là $z_{14} = 1$ (trong khung). Tiến hành tính toán theo các công thức đổi cơ sở ta được bảng đơn hình sau:

Tất cả $\Delta_k \leq 0$ ($k = 1, .., 6$). Phương án tối ưu là: $x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ và $f(x^*) = -17$.

Ví dụ 2.2.2. $f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \to \min$

$$D : \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, ..., 6) \end{cases} \qquad (1)$$

Đổi dấu để có véc tơ đơn vị. Xét

J	c_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			1	-1	0	-2	2	-3
4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
3	0	5	-2	0	1	0	2	$\boxed{5}$
		-14	-2	0	0	0	-3	3
Cột xoay: 6, dòng xoay: 3, phần tử trục $z_{36} = 5$								
4	-2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0
2	-1	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0
6	-3	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1
		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0

$g(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \to \min$

$$D : \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, ..., 6) \end{cases} \tag{2}$$

Nghiệm x^* của (2) cũng là nghiệm của (1) và $f(x^*) = g(x^*) + 7$. Nếu (2) không có phương án tối ưu thì (1) cũng không có phương án tối ưu.

Bài toán (2) có $A_J = \{a^2, a^3, a^5\}$ là ma trận đơn vị. Cơ sở $J = (2, 3, 5)$.

J	c_j	x_j	1	2	3	4	5	6
			6	1	1	3	1	-7
2	1	15	-1	1	0	-1	0	$\boxed{1}$
3	1	9	-2	0	1	0	0	-2
5	1	2	4	0	0	2	1	-3
		26	-5	0	0	-2	0	-3
6	-7	15	-1	1	0	-1	0	1
3	1	39	-4	2	1	-2	0	0
5	1	47	1	3	0	-1	1	0
		-19	-2	-3	0	1	0	0

Tồn tại $\Delta_4 > 0$ mà mọi phần tử trên cột 4 đều < 0. Bài toán không có phương án tối ưu hữu hạn. (1) không có phương án tối ưu.

Chú ý: Khi thực hiện trên bảng đơn hình nên tính hàng cuối cung gồm các ước lượng Δ_k và cột x_j trước. Vì nếu có $\Delta_k \leq 0, \forall k$ thì ta có phương án tối ưu và không cần tính các thành phần z_{ik} trong bảng nữa.

2.3. Tìm cơ sở xuất phát

Để có thể bắt đầu thủ tục đơn hình, ta giả thiết có sẵn một phương án xuất phát và cơ sở tương ứng của nó là J. Hơn nữa, ta luôn giả thiết rằng $rankA = m$, nghĩa là các dòng của ma trận A là độc lập tuyến tính. Trong thực tế không có điều gì đảm bảo điều này cả, thậm trí miền ràng buộc có thể rỗng, tức là bài toán không có phương án chấp nhận được.

Phần này giúp ta giải quyết hai vấn đề trên. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ, cần chỉ ra cách tìm một phương án cực biên và cơ sở tương ứng hoặc chứng tỏ bài toán không có phương án.

2.3.1. Phương pháp hai pha

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min$$

$$D : \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \ \ (i = 1, 2, ..., m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., n). \end{cases} \tag{I}$$

không giảm tổng quát coi $b_i \geq 0$ $(\forall i = 1, 2, ..., m)$. Nếu trái lại có $b_i < 0$, ta nhân hai vế ràng buộc thứ i với -1.

Xét bài toán phụ sau:

$$f(x, u) = u_{n+1} + u_{n+2} + .. + u_{n+m} \longrightarrow \min$$

$$D^{'} : \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_{n+i} = b_i \ (i = 1, 2, ..., m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., n) \\ u_{n+i} \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m). \end{cases} \tag{P}$$

Các biến $u_{n+i}, (i = 1, 2, .., m)$ gọi là các biến giả. Nếu ký hiệu $e = (1, 1, ..., 1)^t$ là véc tơ gồm m thành phần đều bằng 1, còn E là ma trận đơn vị cùng cấp m, thì dạng ma trận của bài toán (P) là

$$f(x,u) = e^t u \to \min$$

$$D^{'}: \begin{cases} Ax + Eu = b \\ x \geq 0,\ u \geq 0. \end{cases} \tag{P}$$

Bài toán (P) cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với $m+n$ biến. Đối với bài toán (P) ta có ngay phương án cực biên xuất phát $(x,u) = (0,b)$ tức là có $x_j = 0$ $(j = 1,2,..,n), u_{n+i} = b_i$ $(i = 1,2,...,m)$ và cơ sở tương ứng là m cột cuối và ma trận cơ sở $A_j = E$, nghĩa là rất thuận lợi để bắt đầu thủ tục đơn hình. Bài toán phụ (P) giúp ta giải quyết vấn đề phương án cực biên và cơ sở xuất phát của bài toán ban đầu (I) như sẽ thấy dưới đây:

Định lý 2.3.1. *Bài toán ban đầu (I) có phương án chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán phụ (P) có phương án tối ưu với tất cả các biến giả u_{n+i} đều bằng* 0 $(i = 1,2,...,m)$.

Chứng minh. $(\Longrightarrow)$ Giả sử (I) có phương án $(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thì rõ ràng (P) có phương án $(x,0) = (x_1, x_2, .., x_n, 0, 0, ..., 0)$ và $\forall (x,u) \in (D^{'})$ có $f(x,0) \geq 0 = f(x,0) \Longrightarrow$ mọi phương án dạng $(x,0)$, $(x \in D)$ đều là phương án tối ưu của bài toán (P).

$(\Longleftarrow)$ Ngược lại nếu (P) có phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* = 0$ thì x^* là phương án của (I). Ta còn cần chứng minh nếu (P) có phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* \neq 0$ thì (I) không có phương án. Thật vậy, giả sử ngược lại, bài toán (I) có phương án $(x(x_1, x_2, ..., x_n)$. Khi đó $(x,0)$ là phương án của bài toán (P), nhưng vì $u^* \neq 0$ nên $f(x^*, u^*) = e^t u^* > 0 = f(x,0)$. Mâu thuẫn với giả thiết (x^*, u^*) là phương án tối ưu. □

Quá trình giải bài toán (P) gọi là pha thứ nhất trong phương pháp hai pha. Giả sử sau pha thứ nhất này ta nhận được phương án tối ưu (x^*, u^*) của bài toán phụ (P). Có 3 khả năng:

a) Nếu $u^* \neq 0$ thì kết luận bài toán ban đầu (I) không có phương án.

b) Nếu $u^* = 0$ và cơ sở tương ứng gồm toàn các cột ứng với x_j, không chứa cột nào ứng với các biến giả u_{n+i} $(i = 1,2,..,m)$. Đây chính là phương án cực biên và cơ sở xuất phát để bắt đầu pha thứ hai, tức là bắt đầu thủ tục đơn hình đối với bài toán ban đầu (I).

c) $u^* = 0$, nhưng cơ sở tương ứng có chứa một số cột ứng với các biến giả u_{n+i}. Ta cần xét kỹ hơn trường hợp này. Ký hiệu J_x là tập các chỉ số trong cơ sở ứng với các biến x_j, J_u là tập các chỉ số trong cơ sở ứng với các biến giả $u_{n+i}, J = J_x \cup J_u$.

Trường hợp C1: Nếu trên dòng có chỉ số $(n+i)$ của bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) ta tìm được một chỉ số k ngoài cơ sở $(1 \leq k \leq n)$ sao cho $z_{n+i,k} \neq 0$ thì ta thực hiện phép biến đổi cơ sở với phần tử trục là $z_{n+i,k}$ để đưa $(n+i)$ ra và đưa k vào cơ sở, ta sẽ nhận được một cơ sở mới trong đó đã được bớt đi một cột ứng với biến u. Lặp lại cách làm này ta sẽ loại hết các cột ứng với biến giả u và sẽ nhận được cơ sở xuất phát cho bài toán ban đầu (I) gồm toàn các cột của ma trận A.

Trường hợp C2: Trên dòng chỉ số$n+i$ của bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) không tìm được chỉ số k ngoài cơ sở $(1 \leq k \leq n)$ mà $z_{n+i,k} \neq 0$ thì ta kết luận rằng dòng i của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại. Thật vậy, vì ma trận cơ sở xuất phát để giải bài toán (P) là ma trận E, nên phần hệ số z_{jk} trong bảng đơn hình là (A, E). Các tính toán trên bảng đơn hình gồm việc nhân một dòng với một số hoặc nhân một dòng với một số rồi cộng vào dòng trước. Trường hợp C2 nghĩa là trên dong chỉ số $n+i$ của bảng đơn hình, phần tử tương ứng với x hoàn toàn bằng 0 sau các phép biến đổi trên. Điều này nói lên rằng dòng i của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại. Ta có thể xóa dòng này đi và đồng thời có thể loại bỏ luôn biến giả u_{n+i} tương ứng.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp C1, C2 ta đều loại được các cột ứng với biến giả u khỏi cơ sở để nhận được một cơ sở gồm toàn cột ứng với biến x. Đây là cơ sở xuất phát để giải quyết bài toán ban đầu.

Chú ý: Nếu trong số các cột của ma trận A có một cột là véc tơ đơn vị với phần tử bằng 1 tại dòng i thì ta không cần thêm biến giả u_{n+i} tương ứng với dòng i, số biến giả chỉ là $m-1$ và cơ sở xuất phát để giải bài toán (P) sẽ gồm cột này và $m-1$ cột ứng với các biến giả. Có bao nhiêu cột của A là ma trận đơn vị thì ta bớt đi bấy nhiêu biến giả.

Ví dụ 2.3.1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{I}$$

Ta đưa thêm các biến giả u_5, u_6, u_7.

Pha 1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ

$$f(x, u) = u_5 + u_6 + u_7 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + u_5 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + u_6 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_7 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4), u_{4+i} \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{P}$$

J	c_j	$(x,u)_j$	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	1	1	1
5	1	2	$\boxed{1}$	2	-1	1	1	0	0
6	1	9	2	-6	3	3	0	1	0
7	1	6	1	-1	1	-1	0	0	1
		17	4	-5	3	3	0	0	0
1	0	2	1	2	-1	1	1	0	0
6	1	5	0	-10	$\boxed{5}$	1	-1	1	0
7	1	4	0	-3	2	-2	-1	0	1
		9	0	-13	7	-1	-4	0	0
1	0	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
3	0	1	0	-2	1	1/5	-2/5	1/5	0
7	1	2	0	$\boxed{1}$	0	-12/5	-1/5	-2/5	1
		2	0	1	0	-12/5	-6/5	-7/5	0
1	0	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
3	0	5	0	0	1	-23/5	-4/5	-3/5	2
2	0	2	0	1	0	-12/5	-1/5	-2/5	1
		0	0	0	0	0	-1	-1	-1

Kết thúc pha thứ nhất ta nhận được phương án tối ưu của bài toán (P) là $(x^*, u^*) = (3, 2, 5, 0, 0, 0, 0)$ với cơ sở tương ứng là $J = \{1, 2, 3\} = \{a^1, a^3, a^5\}$.

Ta có trường hợp b) vì trong phương án tối ưu của bài toán (P) có $u^* = 0$ và cơ sở tương ứng chỉ gồm các cột tương ứng với x. Lấy $x^* = (3, 2, 5, 0, 0, 0, 0)$ với cơ sở $\{1, 2, 3\}$ xuất phát để giải bài toán ban đầu, suy ra pha thứ hai của phương pháp đơn hình là:

J	c_j	x_j	1	2	3	4
			-3	1	3	-1
1	-3	3	1	0	0	6/5
3	3	5	0	0	1	-23/5
2	1	2	0	1	0	-12/5
		8	0	0	0	-94/5

Bảng trên nhận được từ bảng đơn hình cuối cùng của bài toán (P) bằng cách bỏ đi các cột tương ứng với các biến giả, thay cột c_j bằng các hệ số tương ứng với bài toán đầu và tính lại $f(x)$ và Δ_k theo bài toán xuất phát.

Bảng đơn hình này cho thấy đã thỏa mãn tối ưu. Vậy nghiệm cần tìm $x^* = (3, 2, 5, 0)$ và $f(x^*) = 8$

Ví dụ 2.3.2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{I}$$

Xét

$$f(x, u) = u_5 + u_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + u_5 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + u_6 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4), u_5, u_6 \geq 0 \end{cases} \tag{P}$$

J	C_j	$(x, u)_J$	1	2	3	4	5	6
			0	0	0	0	1	1
5	1	27	1	-2	1	0	1	0
6	1	50	2	1	2	0	0	1
4	0	18	1	-1	-1	1	0	0
		77	3	-1	3	0	0	0
5	1	2						
1	0	25						
4	0	-5						
			0	-5/2	0	0	0	-3/2

Điều kiện tối ưu đã thỏa mãn. Phương án tối ưu của (P) là $(x^*, u^*) = (25, 0, 0, -5, 2, 0)$ có $u^* = 2 \neq 0$.

Vậy bài toán ban đầu (I) không có phương án.

Ví dụ 2.3.3.

$$f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_j \ (j = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{I}$$

$$g(x) = -3x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_j \ (j = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{I'}$$

Xét (P) :

$$g(x) = u_4 + u_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 + u_4 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 + u_5 = 5 \\ x_j \ (j = 1, 2, 3), u_4, u_5 \geq 0 \end{cases} \tag{P}$$

J	C_J	$(x,u)_J$	1	2	3	4	5
			0	0	0	1	1
1	0	2	1	2	-1	0	0
4	1	5	0	-10	$\boxed{5}$	1	1
5	1	4	0	-3	2	0	1
		9	0	-13	7	0	0
1	0	3	1	0	0	1/5	0
3	0	1	0	-1	1	1/5	0
5	1	3	0	$\boxed{1}$	0	-2/5	0
		2	0	1	0	-7/5	0
1	0	3	1	0	0	1/5	0
3	0	5	0	0	1	-3/5	2
2	0	2	0	1	0	-2/5	1
		0	0	0	0	-1	-1

Sau pha 1 nghiệm của (P) là: $(x^0, u^0) = (3, 2, 5, 0, 0)$ với cơ sở $J = \{1, 2, 3\}$ gồm toàn các cột tương ứng với x. Dùng $x^0 = (3, 2, 5)$ với $J\{1, 2, 3\}$ làm phương án và cơ sở xuất phát giải $(I^{'})$.

J	C_J	x_J	1	2	3
			-3	-1	3
1	-3	3	1	0	0
3	3	5	0	0	1
2	-1	2	0	1	0
		4	0	0	0

Điều kiện tối ưu đã thỏa mãn. Suy ra nghiệm của $(I^{'})$ là $x^* = (3, 2, 5)$ và $g(x^*) = 4$.

Vậy nghiệm của bài toán (I) là $x^* = (3, 2, 5)$ và $g(x^*) = -4$.

2.3.2. Phương pháp đánh thuế

Phương pháp hai pha có nhược điểm là quá trình tính toán không liên tục mà chia thành hai giai đoạn tách biệt: giải bài toán phụ (P) để tìm cơ sở xuất phát sau đó mới giải bài toán ban đầu. Hàm mục tiêu trong hai giai đoạn này là khác nhau nên một số kết quả tính không kế thừa được. Phương pháp đánh thuế dưới đây khắc phục nhược điểm này bằng cách kết hợp cả hai giai đoạn đó với việc thay bài toán ban đầu bằng bài toán (M) sau đây:

$$f_M(x, u) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M(\sum_{i=1}^{m} u_{n+i}) \to \min$$

$$D_M : \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_{n+i} = b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, ..., n) \\ u_{n+i} \geq 0 \ \ (i = 1, .., m) \end{cases}$$

trong đó (M) là số dương đủ lớn (tức là lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh với nó). Một cách trực giác thấy rằng sẽ bị đánh thuế rất nặng khi có u_{n+i} khiến cho trong phương án tối ưu của bài toán (M) (x^*, u^*) buộc phải có $u^*_{n+i} = 0$ $(\forall 1, ..., m)$. Phương án tối ưu đó đồng thời đạt cực tiểu hàm $f(x) = c^t x = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ trên miền $D = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ tức là cho x^* là phương án tối ưu của bài toán ban đầu. Mặt khác đối với bài toán (M) có đầy đủ các điều kiện để thực hiện thủ tục đơn hình vì ta có ngay phương án xuất phát $(0, b)$ với cơ sở là các véc tơ cột đơn vị ứng với các u_{n+i} (ma trận cơ sở là E).

Định lý sau đây về mối quan hệ giữa hai bài toán $(I), (M)$ cho thấy ý tưởng trên hoàn toàn đúng đắn.

Định lý 2.3.2. *Tồn tại số dương M_0 đủ lớn để $\forall M > M_0$ thì*

a) Nếu bài toán (I) có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu (x, u) của bài toán (M) phải có $u = 0$.

b) Bài toán (I) có phương án tối ưu x^* khi và chỉ khi bài toán (M) có phương án tối ưu $(x^*, 0.)$

Chứng minh. Vì D_M có đỉnh (ít nhất cũng có đỉnh (0, b)) nên theo hệ quả của định lý $I.5.2$ ta có:

$$\forall (x, u) \in D_M : (x, u) = \sum_{k \in I_1} \alpha_k (x^k, u^k) + \sum_{h \in I_2} \beta_h (y^h, s^h), \tag{1}$$

trong đó (x^k, u^k), $k \in I_1$ là các đỉnh của $D_M; \alpha_k \geq 0$, $\sum\limits_{k \in I_1} \alpha_k = 1$, $(g^h, s^h) \in D_M$ là các hướng vô hạn của $D_M, \beta_h \geq 0$, $(h \in I_2)$.

Đặt $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j;\ g(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} u_{n+i}$ ta có $f_M(x, u) = f(x) + Mg(u)$. Ký hiệu:

$s_1 = \{(x^k, u^k); k \in I_1 \text{ mà } g(u^k) > 0\}$

$s_2 = \{(h^h, s^h); h \in I_2 \text{ mà } g(s^h) > 0\}$.

Giả sử bài toán (I) có phương án $\overline{x}$. Ta có thể chọn M_0 dương đủ lớn sao cho $\forall M > M_0$ thì

$$\forall (x^k, u^k) \in S_1 \text{ thì } f_M(x^k, u^k) > f(\overline{x})$$

$$\forall (y^h, s^h) \in S_2 \text{ thì } f_M(y^h, s^h) > 0.$$

a) Vì $\overline{x} \in D$ nên $(\overline{x}, 0) \in D_M$ và $f_M(\overline{x}, 0) = f(\overline{x})$, do đó các đỉnh của D_M chỉ có thể là tối ưu nếu nó không thuộc S_1 hay $g(u) = 0$ suy ra $u = 0$.

b) $(\Longrightarrow)$ Giả sử bài toán (I) có phương án tối ưu x^* thì $(x^*, 0)$ là phương án cực biên của bài toán (M). Vì $\forall (x^k, u^k) \notin S_1$ thì $g(u^k) = 0$ nên

$$f_M(x^K, u^k) = f(x^k) \geq f(x^*) = f_M(x^*, 0) \tag{2}$$

Vì $\forall (y^h, s^h,) \notin S_2$ thì $g(s^h) = 0$ tức là $s^h = 0$. Do $(x^*, 0) + (y^h, 0)$ có dạng (1) nên $(x^*, 0) + (y^h, 0) \in D_M$ mà $(x^*, 0) + (y^h, 0) = (x^* + y^h, 0)$ suy ra

$x^* + y^h \in D$ từ đó $f(x^* + y^h) \geq f(x^*)$ hay $f(x^*) + f(y^h) \geq f(x^*)$. Suy ra $f(y^h) \geq 0$.

Vậy $\forall (y^h, s^h) \notin S_2$ thì $f_M(y^h, s^h) = f(y^h) \geq 0$.

$\forall (x, u) \in D$ có $f_M(s, u) = \sum\limits_{k \in I_1} \alpha_k f_M(x^k, u^k) + \sum\limits_{h \in S_2} \beta_h f_M(y^h, s^h) = \sum\limits_{x^k, u^k \in S_1} \alpha_k f_M(x^k, u^k) + \sum\limits_{y^h, s^h} \beta_h f_M(y^h, s^h) + \sum\limits_{y^h, s^h} \notin S_2 f_M(y^h, s^h) > \sum\limits_{k \in I_1} \alpha_k f(x^*) = f(x^*) = f_M(x^*, 0)$.

Do đó có phương án tối ưu của bài toán (M).

$(\Longleftarrow)$ Nếu $(x^*, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (M) thì

$$\forall x \in D \text{ có } f(x) = f_M(x, 0) \geq f_M(x^*, 0) = f(x^*).$$

Vậy x^* là phương án tối ưu của bài toán (I). □

Khi áp dụng phương pháp đánh thuế ta không cần thiết phải biết cụ thể giá trị của M. Ta chỉ cần coi M là một số dương đủ lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh với nó.

Vì hàm mục tiêu của bài toán (M) biểu diễn tuyến tính qua hàm mục tiêu của bài toán (I) và bài toán (P),

$$f_M(x, u) = f(x) + Mg(u)$$

trong đó $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ là hàm mục tiêu của bài toán (I) còn $g(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} u_{n+i}$ là hàm mục tiêu của bài toán (P) nên

$$\Delta_k^{(M)} = \Delta_k + M\Delta_k^{(P)},$$

Ở đây $\Delta_k^{(M)}, \Delta_k, \Delta_k^{(P)}$ là các ước lượng của bài toán tương ứng $(M), (I), (P)$. Khi so sánh các $\Delta_k^{(M)}$ ta chỉ cần tuân theo quy tắc sau:

a) Coi $\Delta_k^{(M)} > 0$ nếu $\Delta_k^{(P)} > 0, \forall \Delta_k$ hoặc $\Delta_k^{(P)} = 0, \Delta_k > 0$.

b) Coi $\Delta_k^{(M)} > \Delta_h^{(M)}$ nếu $\Delta_k^P > \Delta_k^h, \forall \Delta_k, \Delta_h$ hoặc $\Delta_k^P = \Delta_k^h, \Delta_k > \Delta_h$

Cũng vì thế trong bảng đơn hình của bài toán (M), dòng cuối cùng ghi các ước lượng $\Delta_k^{(M)}$ được chia thành hai hàng: hàng trên ghi các Δ^k (ước lượng của bài toán (I), ứng với M=0), hàng dưới ghi các $\Delta_k^{(P)}$ (ước lượng của bài toán (P), ứng với $M = 1, c_j = 0$ $(j = 1, ..., n)$).

Kết quả giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình sẽ rơi vào một trong 3 trường hợp sau đây:

a) Nhận được phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* = 0$. Lúc đó x^* là phương án tối ưu của bài toán ban đầu.

b) Nhận được phương án tối ưu (x^*, u^*) với $u^* \neq 0$, ta kết luận bài toán ban đầu (I) không có phương án.

c) Phát hiện ra rằng bài toán (M) có hàm mục tiêu không bị chặn dưới trong miền ràng buộc. Nếu cơ sở tương ứng không có cột nào ứng với các biến giả thì đây cũng là một cơ sở của bài toán (I), ta kết luận bài toán (I) có phương án nhưng hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên miền ràng buộc nên không có phương án tối ưu.

Nếu cơ sở vẫn còn cột ứng với biến giả thì để biết bài toán (I) có phương án hay không ta phải sửa lại hàm mục tiêu bằng cách cho tất cả $c_j = 0,\ (j = 1, ..., n), M = 1$ và tiến hành thủ tục đơn hình giải bài toán (P) như trong pha ban đầu của phương pháp hai pha.

Ví dụ 2.3.4. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đánh thuế

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geq 0,\ (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{I}$$

bài toán (M) là:

$$f_M(x, u) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + Mu_5 + Mu_6 + Mu_7 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + u_5 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + u_6 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_7 = 6 \\ x_j \geq 0,\ (j = 1, 2, 3, 4), u_{4+i}\, (u = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Phương án cực biên xuất pháp là $(x, u) = (0, 0, 0, 0, 2, 6, 9)$, cơ sở tương ứng là: $J = \{5, 6, 7\}$.

Ta có bảng đơn hình và sau ba lần đổi cơ sở ta sẽ tìm được lời giải của bài toán.

Điều kiện tối ưu đã thỏa mãn vì

$\Delta_k^{(M)} < 0$ $(k = 1, .., 6;$ $\Delta_7^{(M)} = \Delta_7 - M < 0)$ khi M đủ lớn.

Suy ra phương án tối ưu là $x^* = (3, 2, 5, 0)$ và giá trị tối ưu $f(x^*) = 8$.

J	C_J	$(x,u)_J$	1	2	3	4	5	6	7
			-3	1	3	-1	M	M	M
5	M	2	$\boxed{1}$	2	-1	1	1	0	0
6	M	9	2	-6	3	3	0	1	0
7	M	6	1	-1	1	-1	0	0	1
	(M=0)	0	3	-1	-3	1	0	0	0
	(M=1)	17	4	-5	3	3	0	0	0
1	-3	2	1	2	-1	1	1	0	0
6	M	5	0	-10	$\boxed{5}$	1	-2	1	0
7	M	4	0	-3	2	-2	-1	0	1
		-6	0	-7	0	-2	-3	0	0
		9	0	-13	7	-1	-4	0	0
1	-3	3	1	0	0	6/5	3/5	1/5	0
3	3	1	0	-2	1	1/5	-2/5	1/5	0
7	M	2	0	$\boxed{1}$	0	-12/5	-1/5	-1/5	1
		-6	0	-7	0	-2	-3	0	0
		2	0	1	0	-12/5	-6/5	-7/5	0
1	-3								
3	3								
2	1								
		8	0	0	0	-94/5	-8/5	-14/5	7
		0	0	0	0	0	-1	-1	-1