Chương 3

BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

3.1. Hàm Lagrange. Bài toán đối ngẫu

3.1.1. Hàm Lagrange

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc:

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{P}$$

Định nghĩa 3.1.1. Hàm $L(x, y) = c^t x + (b - Ax)^t y$ xác định với $x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m$ gọi là hàm Lagrange của bài toán trên.

Điểm $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^n \times y \in \mathbb{R}_+^m$ gọi là điểm yên ngựa của hàm Lagrange $F(x, y)$ nếu $L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m$.

3.1.2. Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

Rõ ràng $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ thỏa mãn điều kiện $Ax \geq b$ thì $b - Ax \leq 0$, do đó

$$\max_y L(x,y) = \begin{cases} c^t x & \text{nếu } x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ thỏa mãn } Ax \geq b \\ +\infty & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Vậy bài toán quy hoạch tuyến tính (P) hoàn toàn tương đương với bài toán:

$$\min_x \max_y L(x,y). \tag{*}$$

Đổi thứ tự lấy cực trị trong bài toán $(*)$ ta có bài toán

$$\max_y \min_x L(x,y). \tag{**}$$

Bài toán $(*)$ gọi là bài toán gốc, $(**)$ gọi là bài toán đối ngẫu

Đặt

$$\begin{aligned} g(y) = \min_x L(x,y) &= \min_x \{\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m b_i y_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij x_j y_i}\} \\ &= \min_x \{\sum_{i=1}^m b_i y_i + \sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij y_i} x_j)\} \\ &= \min_x \{b^t y + (c - A^t y)x\} = \begin{cases} b^t y & \text{nếu } c \geq A^t y \\ -\infty & \text{nếu trái lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bài toán $(**)$ chính là bài toán:

$$\begin{cases} b^t y \to \max \\ A^t y \leq c \qquad \text{cũng có thể viết} \quad y^t A \leq c^t \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3.1.3. Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} c^t x \to \min \\ Ax = b \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{P}$$

Để nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc bằng cách thay ràng buộc đẳng thức bởi hai bất đẳng thức, ta có thể viết bài toán (P) dưới dạng

$$\begin{cases} c^t x \to \min \\ Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Lại lặp lại cách làm như trên ở 3.1.2 ta nhận được bài toán đối ngẫu sau đây với hai nhóm biến u, v ứng với hai nhóm ràng buộc $Ax \geq b$ và $Ax \leq b$;

$$\begin{cases} b^t u + (-b^t)v \to \max \\ A^t u + (-A)^t v \geq c \\ -Ax \geq -b \\ u \geq 0; v \geq 0. \end{cases}$$

Bây giờ đặt $y = u - v$ thì bài toán trên trở thành

$$\begin{cases} b^t y \to \max \\ A^t y \leq c \\ (y \text{ có dấu tùy ý}). \end{cases} \tag{Q}$$

Bài toán (Q) là bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (P)

Ví dụ 3.1.1. Bài toán gốc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = -3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, .., 4 \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$\begin{cases} 4y_1 - 3y_2 + 6y_3 \to \max \\ y_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \leq 0 \\ 4y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_3 \leq -1 \\ (y_1, y_2, y_3 \text{ có dấu tùy ý}) \end{cases}$$

3.1.4. Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Để dễ hình dung ta xét trường hợp $m = 2, n = 3$.

1) Giả sử bài toán gốc là

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3) & (3) \end{cases}$$

Ta đưa nó về dạng chính tắc bằng cách đưa thêm biến bù $x_4 \geq 0$ ta có

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{31}y_2 \leq c_3 \\ -y_1 + 0.y_2 \leq 0 \qquad\qquad (4) \end{cases}$$

Ràng buộc (4) cho ta $y_1 \geq 0; y_2$ tùy ý (do đó không có ràng buộc về dấu). Vậy bài toán đối ngẫu của bài toán $(1), (2), (3)$ là:

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{31}y_2 \leq c_3 \\ y_1; \geq 0 \ \ y_2 \ \text{ có dấu tùy ý.} \end{cases}$$

Như vậy trong bài toán gốc nếu có ràng buộc thứ i là ràng buộc bấtđẳng thức "$\geq$" thì trong bài toán đối ngẫu phải có điều kiện $y_i \geq 0$. Nếu trong bài toán gốc, ràng buộc thức j là ràng buộc đẳng thức thì trong bài toán đối ngẫu biến y_j không ràng buộc về dấu.

2) Giả sử bài toán gốc là

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ x_1 \leq 0;\ \ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $t_1 = -x_1$. Ta có bài toán

$$f(x) = -c_1t_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -a_{11}t_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ -a_{21}t_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ t_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu là

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 \leq -c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leq c_3 \\ y_1, y_2, y_3 \ \text{ có dấu tùy ý} \end{cases}$$

hay $g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max$

$$\begin{cases} a_{11}y_1a_{12}y_2 \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leq c_3 \\ y_1, y_2, y_3 \ \text{ có dấu tùy ý} \end{cases}$$

Như vậy, nếu trong bài toán gốc có biến $x_i \leq 0$ thì trong bài toán đối ngẫu, ràng buộc thứ i sẽ đổi ngược dấu bất đẳng thức.

3) Giả sử bài toán gốc là

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ x_1 \ \text{ có dấu tùy ý}, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Thay $x_1 = x_1^{'} - x_1^{''}$, bài toán trở thành

$$f(x) = c_1(x_1^{'} - x_1^{''}) + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}(x_1^{'} - x_1^{''}) + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}(x_1^{'} - x_1^{''}) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ x_1^{'}, x_1^{''}, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max \qquad \text{hay} \quad g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \le c_1 \\ -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 \le -c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \le c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \le c_3 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ có dấu tùy ý} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \le c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \le c_3 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ có dấu tùy ý} \end{cases}$$

Như vậy, nếu trong bài toán gốc x_i có dấu tùy ý thì trong ài toán đối ngẫu ràng buộc thứ i là ràng buộc đẳng thức.

Từ các phân tích trên, có thể bỏ qua các giai đoạn chuyển bài toán về dạng chính tắc và cho ta quy tắc xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát với ràng buộc hỗn hợp bất kỳ.

Bài toán gốc		Bài toán đối ngẫu
$c^tx \to \min$		$b^ty \to \max$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$	$i = 1, 2, ..., m_1$	$y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, 3, ..., m_1)$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$i = m_1 + 1, ..., m$	y_i có dấu tự do $(i = m_1 + 1, ...m)$
$x_j \ge 0$	$j = 1, 2, ..., n_1$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \le c_j, \ (j = 1, 2, .., n_1)$
x_j có dấu tùy ý	$j = n_1 + 1, ..., n$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j = c_j \ (j = n_1 + 1, ..., n)$

Quan hệ gốc-đối ngẫu (Primal problem-Dual problem) là hoàn toàn đối xứng, nghĩa là đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc, nếu coi bài toán này là gốc thì bài toán kia là đối ngẫu và ngược lại.

Thật vậy, ta thử viết bài toán đối ngẫu của bài toán (Q) ở cột phải trong bảng trên. Trước hết ta viết lại bài toán (Q) thành

$$\begin{cases} -b^ty \to \min & \\ \sum\limits_{i=1}^{m} (-a_{ij})y_i \ge -c_j & (j = 1, ..., n_1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_{ij})y_i = -c_j & (j = n_1 + 1, ..., n) \\ y_i \ge 0 & (i = 1, ..., m_1) \\ y_i \ \text{ tự do} & (i = m_1 + 1, ..., m) \end{cases}$$

Coi bài toán (Q) này là bài toán gốc, áp dụng quy tắc nêu ở bảng trên thì bài toán đối ngẫu của nó là:

$$\begin{cases} -c^t y \to \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j \le -b_i & (i = 1, ..., m_1) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j = -b_j & (i = m_1+1, ..., m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, ..., n_1) \\ x_j \ \text{ tự do} & (j = n_1+1, ..., n) \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} c^t y \to \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij})x_j \ge b_i & (i = 1, ..., m_1) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij})x_j = b_j & (i = m_1+1, ..., m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, ..., n_1) \\ x_j \ \text{ tự do} & (j = n_1+1, ..., n) \end{cases}$$

Đó chính là bài toán (P). Vậy đối ngẫu của bài toán đối ngẫu (Q) là bài toán gốc (P).

Ví dụ 3.1.2. Bài toán gốc

$$f(x) = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 6x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 80 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge -10 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 30 \\ x_1 + x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0; x_2, x_3 \ge 0; x_4, x_5 \text{ tự do} \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 80y_1 - 10y_2 + 30y_3 + 6y_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 5 & (\text{do } \ x_1 \leq 0) \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -1 & (\text{do } \ x_2 \geq 0) \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 2 & (\text{do } \ x_3 \geq 0) \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 3 & (\text{do } x_4 \ \text{tự do}) \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 6 & (\text{do } x_5 \ \text{tự do}) \\ y_1 \text{ tự do} & (\text{vì ràng buộc 1 ở bài toán gốc: "="}) \\ y_2 \geq 0 & (\text{vì ràng buộc 2 ở bài toán gốc:}'' \geq'') \\ y_3, y_4 \leq 0 & (\text{vì ràng buộc 3, 4 ở bài toán gốc:}'' \leq'') \end{cases}$$

Ví dụ 3.1.3. Bài toán gốc

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 2x_3 + x_4 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ x_1; x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ tự do} \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 5y_1 + 7y_2 + 20y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 & \text{do } x_1 \geq 0 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 & \text{do } x_2 \geq 0 \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq -1 & \text{do } x_3 \leq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 11 & \text{do } x_4 \ \text{tự do} \leq 0 \\ y_1 \geq 0 & \text{do ràng buộc thứ nhất của bài toán gốc là" } \leq \text{ "} \\ y_2 \text{ tự do} & \text{do ràng buộc thứ hai của bài toán gốc là" } = \text{ "} \\ y_3 \leq 0 & \text{do ràng buộc thứ ba của bài toán gốc là" } \geq \text{ "} \end{cases}$$

3.2. Quan hệ giữa cặp bài toán đối ngẫu

Vì bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ có thể đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và có bài toán đối ngẫu tương ứng, nên không mất tính tổng quát ta xét cặp bài toán đối ngẫu với bài toán gốc cho dưới dạng chính tắc và để đơn giản ta xét trường hợp bài toán không suy biến.

Bài toán gốc

$$f(x) = c^t x \to \min$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = b^t y \to \max$$
$$\begin{cases} A^t y \leq c \\ y \text{ tự do} \end{cases} \qquad \text{(Q)}$$

Định lý 3.2.1. *Giả sử x là phương án bất kỳ của bài toán gốc (P), y là phương án bất kỳ của bài toán đối ngẫu (Q) thì $f(x) \geq g(y)$.*

Chứng minh. $g(y) = b^t y = (Ax, y) = (x, A^t y) \leq (x, c) = c^t x = f(x)$. □

Định lý 3.2.2. *Nếu x^* là phương án của bài toán gốc (P), y^* là phương án của bài toán đối ngẫu (Q) và có $f(x^*) = g(y^*)$ thì x^* là phương án tối ưu của (P), y^* là phương án tối ưu của (Q).*

Chứng minh. Giả sử x là một phương án bất kỳ của (P). Theo định lý 3.2.1 có $f(x) \geq g(y)$. Theo giả thiết $g(y^*) = f(x^*)$ vậy $f(x) \geq f(x^*)$. Vậy x^* là phương án tối ưu của bài toán (P).

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được y^* là phương án tối ưu của bài toán (Q). □

Định lý 3.2.3. *a) Nếu bài toán (P) có phương án tối ưu x^* thì bài toán đối ngẫu (Q) cũng có phương án tối ưu y^* và ngược lại, đồng thời $f(x^*) = g(y^*)$.*

b) Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ của bài toán gốc (P) không bị chặn dưới thì bài toán đối ngẫu (Q) không có phương án.

Nếu hàm mục tiêu $g(y)$ của bài toán gốc (Q) không bị chặn trên thì bài toán gốc (P) không có phương án.

Chứng minh. Giả sử bài toán (P) có phương án tối ưu, thế thì nó có phương án cực biên tối ưu x^* với cơ sở tương ứng J ma trận cơ sở A_J. Vì $x^* = 0\ \forall j \notin J$ nên có $A_J x^*_J = b$ hay $x^*_J = A_J^{-1} b$.

Gọi z^k là cột thứ k trong bảng đơn hình, nó chính là hệ số khai triển của cột a^k trong ma trận A theo cơ sở J, tức là $a^k = z^k A_J$ hay $z^k = a^k A_J^{-1}$:

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k = z^k c_J - c_k$$

vì x^* là phương án tối ưu nên $\Delta_k \leq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$ tức là có $z^k c_J - c_k \leq 0$ $(k = 1, 2, .., n)$ thay $z^k = a^k A_J^{-1}$ vào ta được $a^k A_J^{-1} c_J - c_k \leq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$ hay $A^t A_J^{-1} c_J - c_k \leq 0$. Xét vector $y^* = A_J^{-1} c_J$ thì có $A^t y^* - c \leq 0$, do đó y^* là một phương án của bài toán đối ngẫu. Hơn nữa theo định lý 2.2.1 thì y^* cũng là một phương án tối ưu của bài toán (Q) vì ta có $g(y^*) = by^* = b^t A_J^{-1} c_J = A_J^{-1} b c_J = x_J^* c_J = cx^* = f(x^*)$.

Vì đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc, nên mệnh đề ngược lại chứng minh tương tự.

Chứng minh trên đồng thời chỉ ra cách tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (Q) từ cơ sở của bài toán gốc dạng chính tắc: $y^* = A_J^{-1} b$.

b) Nếu $f(x) = c^t x \to -\infty$ (không bị chặn dưới), cần chứng minh bài toán đối ngẫu (Q) không có phương án.

Giả sử ngược lại bài toán (Q) có phương án y thế thì với mọi phương án x của bài toán (P) đều có $f(x) \geq g(y) = by$, mâu thuẫn với giả thiết $g(x)$ không bị chặn dưới.

Tương tự nếu $g(x)$ không bị chặn trên thì bài toán gốc (P) không có phương án. □

Hệ quả 3.2.1. *Điều kiện cần và đủ để cặp phương án x^*, y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (P), (Q) là $c^t x^* = b^t y^*$.*

Khi nghiên cứu quy tắc thành lập bài toán đối ngẫu ta thấy có sự tương phản về các điều kiện. Nếu ràng buộc đòi hỏi chặt ở bài toán này, ví dụ $\sum\limits_{j-1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ trong bài toán gốc, thì tương ứng với nó biến y_i không có điều kiện gì về dấu trong bài toán đối ngẫu. Định lý sau thể hiện rõ hơn mối quan hệ này.

Xét cặp bài toán đối ngẫu đối xứng:

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{(P)} \qquad\qquad \begin{cases} g(y) = b^t y \to \max \\ A^t y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(Q)}$$

Định lý 3.2.4. *[Định lý yếu về độ lệch bù] Giả sử $x \in \mathbb{R}^n$ là phương án của bài toán gốc (P, $y \in \mathbb{R}^m$) là phương án của bài toán đối ngẫu (Q). Khi đó điều kiện cần và đủ để x và y là các phương án tối ưu của các bài toán tương ứng là:*

$$(\sum_{j-1}^{n} a_{ij} x_j - b_i) y_i = 0 \ (\forall i = 1, 2, ..., m) \tag{*}$$

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}) x_j = 0 \ (\forall j = 1, 2, ..., n) \tag{**}$$

Chú ý. Điều kiện $(*)$ ở trên cho ta:

Nếu $y_i > 0$ thì $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. Nếu $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ thì phải có $y_i = 0$.

Điều kiện $(**)$ cho ta:

Nếu $x_j > 0$ thì phải có $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$. Nếu $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i < c_j$ thì phải có $x_j = 0$.

Chứng minh. Đặt $u_i = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i, v = (c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j)x_j$.

Vì x, y là các phương án chấp nhận được của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu nên $u_i \geq 0, v_j \geq 0$ $(\forall i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$.

Đặt $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \geq 0; \beta = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \geq 0$, khi đó $\alpha = 0$ khi và chỉ khi có $(*)$, $\beta = 0$ khi và chỉ khi có $(**)$ và điều kiện $(*)$ và $(**)$ được đồng thời thực hiện khi và chỉ khi $\alpha + \beta = 0$.

Ta có

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i + \sum_{j=1}^{n}(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_jx_j - \sum_{i=1}^{m} b_iy_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jy_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_ix_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_jx_j - \sum_{i=1}^{m} b_iy_i = c^tx - b^ty = f(x) - g(y).$$

Theo hệ quả của định lý *3.2.3,* điều kiện cần và đủ để x, y là cặp phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu là $f(x) = g(y)$ do đó là $\alpha + \beta = 0$ tức là $\alpha = \beta = 0$ nói cách khác là các điều kiện $(*)$ và $(**)$. □

Liên hệ giữa bài toán quy hoạch tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc:

$$\begin{cases} f(x) = c^tx \to \max \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{I}$$

trong đó A là ma trận cấp m
timesn; các véc tơ $x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Bài toán đối ngẫu của (I) là

$$\begin{cases} g(y) = b^t y \to \min \\ A^t y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{I*}$$

trong đó $y \in \mathbb{R}^m$.

Từ lý thuyết đối ngẫu ta biết rằng nếu cặp phương án x, y của cặp bài toán đối ngẫu $(I), (I^*)$ thỏa mãn điều kiện $c^t x = b^t y$ thì x, y là cặp phương án tối ưu của bài toán gốc (I) và bài toán đối ngẫu tương ứng (I^*). Do đó x, y là cặp phương án tối ưu của (I) và (I^*) nếu thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ A^t y \leq c \\ c^t x = b^t y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ta đưa thêm các biến phu không âm u, v thì (1) có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} Ax - u = b \\ A^t y + v = c \\ c^t x = b^t y \\ x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Như vậy, nếu (x^*, y^*, u^*, v^*) là nghiệm của hệ (2) thì x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc (I), y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (I^*). Ngược lại nếu x^*, y^* là cặp phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu $(I), (I^*)$ thì đặt $u^* = Ax^* - b, v = c - A^t y^*$, ta thu được (x^*, y^*, u^*, v^*) là nghiệm của (2). Điều đó chứn tỏ rằng việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính (I) tương đương với tìm nghiệm không ân của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} Ax - u = b \\ A^t y + v = c \\ c^t x = b^t y. \end{cases} \tag{2}$$

Vì vậy mọi thuật toán tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính đều áp dụng trực tiếp vào việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Ngược lại, mọi thuật toán quy hoạch tuyến tính đều có thể dùng để tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính bằng cách giải bài toán ở pha thứ nhất trong phương pháp hai pha.

3.3. Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu

Để minh họa về ý nghĩa của bài toán đối ngẫu ta xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 3.3.1. (Bài toán lập kế hoạch sản xuất). Một xí nghiệp sản xuất n mặt hàng, sử dụng m loại vật liệu với số lượng hiện có là b_i $(i = 1, ..., m)$. Biết rằng để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j cần a_{ij} đơn vị nguyên liệu thứ i $(j = 1, ..., n; i = 1, ..., m)$ và một đơn vị mặt hàng thứ j được bán với giá c_j đơn vị tiền. Hãy lập kế hoạch sản xuất để xí nghiệp thu được tổng giá trị sản phẩm cao nhất với điều kiện hạn chế về số vật liệu hiện có.

Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là số lượng mặt hàng sẽ sản xuất theo kế hoạch. Bài toán lập kế hoạch sản xuất đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, \ \ (j = 1, .., n) \end{cases}$$

hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} f(x) = c^t x \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{P}$$

Trong bài toán thực tế ở trên ta chưa xé đến giá cả của các vật liệu dùng đến trong quá trình sản xuất . Rõ ràng xí nghiệp mong muốn các mức giá càng thấp càng tốt để có thể có nhiều lơi nhuận. Một câu hỏi đặt ra, mức giá thế nào là "hợp li". Vấn đề sẽ rõ ràng hơn nếu ta đưa ra tình huống sau: Một xí nghiệp khác muốn mua lại chính số vật liệu nói trên. Người bán sẽ chỉ chấp nhận bán nếu số tiền thu được do bán các vật liệu để sản xuất một đơn vị hàng j không thấp hơn c_j đơn vị tiền, người mua thì muốn mua với tổng số tiền thấp nhất.

Bài toán định giá nói trên cũng đưa ta đến một bài toán quy hoạch tuyến tính.

Gọi y_i $(i = 1, .., m)$ là giá bán một đơn vị vật liệu thứ i.

Cần tìm $y = (y_1, y_2, .., y_m)$ sao cho:

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \rightarrow \min$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_1 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_1 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{1n}y_1 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_j \geq 0 \ \ (i = 1, ..., m) \end{cases}$$

hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} g(y) = by \\ rightarrow \min \\ A^ty \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{Q}$$

Hai bài toán (P) và (Q) là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng.

Gọi x^*, y^* là cặp phương án tối ưu của (P) và (Q). Theo định lý về độ lệch bù ta có:

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i)y^* = 0 \ \ (i = 1, .., m) \tag{*}$$

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y^*)x^* = 0 \ \ (j = 1, ..., n) \tag{**}$$

Từ $(*)$ cho ta:

Nếu $y^* > 0$ thì $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x^* = b_i$, tức là nếu giá bán của vật liệu thứ i dương thì người sản xuất cần dùng hết loại vật liệu đó.

Nếu $\sum\limits_{j=1}^{n} < b$ thì $y^* = 0$, tức là người sản xuất chỉ không dùng hết vật liệu thứ i nếu giá bán vật liệu thứ i bằng không (chỉ có như vậy mới không lãng phí vật liệu thứ i).

Từ $(**)$ cho ta:

Nếu $x^* > 0$ thì $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y^* = c_j$, tức là nếu mặt hàng thứ j được sản xuất thì tổng giá bán các vật liệu để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j phải bằng giá trị của một đơn vị mặt hàng j.

Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y^* > c_j$ thì $x^* = 0$, tức là tổng giá bán các vật liệu để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j lớn hơn giá trị một đơn vị mặt hàng j thì không sản xuất mặt hàng j (vì sản xuất không có lợi bằng bán vật liệu).

Nếu x^* là phương án sản xuất tối ưu của nhà sản xuất thì y^* là giá chấp nhận của nhà sản xuất và là giá mua tối ưu có thể được của người mua.

Ví dụ 3.3.2. (Bài toán lập thực đơn).

Có n loại thực phẩm. Biết rằng mỗi đơn vị thực phẩm thứ j chứa a_{ij} đơn vị chất dinh dưỡng i và giá thành c_j đơn vị tiền $(i = 1, .., m; j = 1, ..., n)$. Hãy lập một thực đơn sao cho trong bữa ăn đảm bảo có ít nhất b_j đơn vị chất i mà giá thành là rẻ nhất.

Gọi x_j là số đơn vị thực phẩm loại j dùng trong bữa ăn. bài toán trên dẫn về bài toán quy hoạch tuyến tính sau: Tìm véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$ thỏa mãn các điều kiện.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b \;\; (i = 1, ..., m) \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1, .., n) \end{cases} \tag{P}$$

Trong thực tế, nhiều trường hợp có thể thậm chí thay thế một số thực phẩm bằng thuốc bổ.

Bây giờ ta xét công việc kinh doanh của một chủ sản xuất thuốc bổ. Gọi y_i là giá một đơn vị chất dinh dưỡng thứ i chứa trong thuốc bổ (chẳng hạn dưới dạng viên) của nhà sản xuất thuốc, thì nhà sản xuất thuốc cần định được giá y_i $(i = 1, .., m)$ sao cho nếu bà nội trợ dùng thuốc hay thực phẩm thì giá thành của một thực đơn không đắt hơn khi dùng thực phẩm mà nhà sản xuất có doanh thu cao nhất. Bài toán này dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính sau: Tìm véc tơ $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ sao cho

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j \\ y_i \geq 0 \;\; (i = 1, 2, .., m) \end{cases} \tag{Q}$$

Rõ ràng bài toán (P) và (Q) là cặp bài toán đối ngẫu. Từ định lí về độ lệch bù cho thấy:

Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$ thì $x_j = 0$, tức là nếu dùng thuốc rẻ hơn khi dùng thực phẩm thứ j thì bà nội trợ không mua thực phẩm thứ j.

Nếu $y_i > 0$ thì $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b$, tức là nếu nhà sản xuất định giá dương cho một đơn vị thuốc bổ thứ i thì bà nội trợ sẽ tìm cách đáp ứng ở mức tối thiểu đòi hỏi về chất dịnh dưỡng thứ i trong khẩu phần.

Ví dụ 3.3.3. (Trò chơi ma trận)

Ta gọi trò chơi ma trận hai đấu thủ là bộ ba (I, J, A) trong đó $\{i = 1, 2, .., n\}$ là tập hợp các chiến thuật chơi của đấu thủ thứ nhất $J = \{1, 2, .., m\}$ là tập hợp các chiến thuật chơi của đấu thủ thứ hai còn $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $(i \in I, j \in J)$ là ma trận giá của trò chơi. Nếu trong một cuộc chơi, đấu thủ thứ nhât dùng chiến thuật thức i, đấu thủ thứ hai dùng chiến thuật thứ j thì đấu thủ thứ nhất thu được tiền a_{ij} còn đấu thủ thứ hai sẽ phải trả a_{ij} (lưu ý: nếu $a_{ij} > 0$ thì thắng thu a_{ij}, thua chi a_{ij}, nếu $a_{ij} < 0$ thì thu a_{ij} tức là chi $(-a_{ij})$ còn chi a_{ij}, tức là thu $(-a_{ij})$).

Bài toán đặt ra là tìm chiến lược chơi tối ưu cho hai đấu thủ.

Tròn trò chơi như vậy, thông tin về các đấu thủ là rất quan trọng, đồng thời lợi nhuận (tổn thất) từ cuộc chơi tính như kết quả của nhiều lần chơi, vì vậy có khái niệm "chiến thuật hỗn hợp". Các đáu thủ bây giờ không đưa ra sự lựa chọn cụ thể chiến thuật nào mà sẽ lựa chọn theo xác suất chiến thuật của mình trên các tập I, J. Giả sử x_i là xác suất chọn chiến thuật thứ i của đấu thủ thứ nhất. Véc tơ xác xuất $x = (x_1.x_2, ..., x_n)$ với $x_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ gọi là chiến thuật của đấu thủ thứ nhất. Tương tự như vậy véc tơ $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ với $y_i \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$ gọi là chiến thuật của đấu thủ thứ hai.

Giả sử đấu thủ thứ nhất quan tâm đến việc tìm chiến thuật hỗn hợp x đảm bảo lợi nhuận ít nhất α. Lợi nhuận của đấu thủ thứ nhất nhận được khi anh ta dùng chiến thuật hỗn hợp x còn đấu thủ thứ hai dùng chiến thuật thứ j là $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{nj}x_n$. Vì α là lơi nhuận tối thiểu phải đạt được khi dùng chiến thuật hỗn hợp x bất kể đấu thủ thứ hai dùng chiến thuật nào, do đó phải có:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{nj}x_n \geq 0 \ \ \forall j = 1, 2, ..., m$$

Như vậy đấu thủ thứ nhất cần phải giải bài toán tối ưu sau:

$$\begin{cases} \alpha \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq \alpha, \ \ \forall j = 1, 2, ..., m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, ..., n) \end{cases} \tag{P}$$

Tương tự như vậy, giả sử β là tổn thất nhiều nhất mà đấu thủ thứ hai có thể chịu đựng được khi anh ta chọn chiến thuật hỗn hợp y bất kể dấu thủ thứ nhất dùng chiến thuật gì, thì đấu thủ thứ hai cần phải giải bài toán tối ưu sau:

$$\begin{cases} \beta \to \min \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \leq \beta \;\; \forall i = 1, 2, ..., n \\ \sum\limits_{j=1}^{m} y_i = 1 \\ y_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, ..., m) \end{cases} \tag{Q}$$

Rõ ràng (P) và (Q) là cặp bài toán đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính. Dễ thấy cả hai bài toán đều có phương án chấp nhận được thì tử định lý 3.2.3 suy ra cả hai bài toán đề có phương án tối ưu là lợi nhuận tối đa của đấu thủ thứ nhất bằng tổn thất tối thiểu của đấu thủ thứ hai.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Tìm bài toán đối ngẫu của các bài toán sau đây.

1) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

2)$f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \\ x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

3)$f(x) = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -2 \\ x_1, x_2 \text{ tùy ý } \; x_3 \leq 0. \end{cases}$$