# Chương 4

# BÀI TOÁN VẬN TẢI



## 4.1. Thiết lập bài toán vận tải

Bài toán vận tải là một trong những mô hình có nhiều ứng dụng trong thực tế. Trước hết ta xét bài toán vận tải cân bằng thu - phát. Bài toán được phát biểu như sau:

Có $m$ điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ cung cấp một loại mặt hàng nào đó có khối lượng tương ứng $a_1, a_2, ..., a_m$ $(a_i \leq 0,\ i = 1, ..., m)$ và $n$ điểm thu $B_1, B_2, ..., B_n$ tiêu thụ loại hàng đó với khối lượng yêu cầu tương ứng $b_1, b_2, ..., b_n$ $(b_j \geq 0,\ j = 1, ..., n)$. Ta gọi $A_i\ (i = 1, .., m)$ là điểm phát thứ $i$, $B_j\ (j = 1, .., n)$ là điểm thu thứ $j$. Giả thiết rằng tổng lượng hàng cần phát đi ở các điểm phát bằng tổng lượng hàng thu về ở các điểm thu $(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j)$. Điều kiện này được gọi là điều kiện cân bằng thu-phát.

Giả sử chi phí vận chuyển một đơn vị (tấn, tạ,...) hàng từ $A_i$ đến $B_j$ là $c_i j$ đơn vị tiền (VNĐ). Ma trận $C = (c_{ij})_{m \times n}$ được gọi là ma trận cước phí.

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu đơn vị hàng sao cho:

- Các điểm phát đều phát hết hàng.
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng yêu cầu.
- Tổng cước phí vận chuyển là ít nhất.

Ta sẽ xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên.

Gọi $x_{ij}$ là số đơn vị hàng chuyển từ $A_i$ đến $B_j$, tất nhiên $x_{ij}$ $(i = 1,..,m;\ j = 1,..,n.)$ Tổng lượng hàng phát đi từ $A_i$ đến $B_j$ bằng $a_i$, tức là $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $(i = 1,..,m)$, tổng lượng hàng thu về $B_j$ từ mọi $A_i$ $(i = 1,..,m)$ bằng $b_j$ tức là $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ $(j = 1,..,n)$.

Tổng cước phí phải trả là $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_ij$, tổng này càng nhỏ càng tốt.

Mô hình bài toán vận tải có dạng

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ij \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ (i = 1,..,m) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ (j = 1,..,n) \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0\ (i = 1,...,m; j = 1,..,n) \quad (3)$$

Ma trận $X = (x_{ij})_m \times n$ thỏa mãn $(1),(2),(3)$ gọi là một phương án của bài toán vận tải và nếu nó làm cho $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_ij$ đạt nhỏ nhất thì gọi là một phương án tối ưu của bài toán vận tải. Rõ ràng bài toán vận tỉa là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, vì thế có thể giải nó bằng thuật toán của quy hoạch tuyến tính. Nhưng khi đó số ẩn thường khá lớn ($m \times n$ ẩn $x_{ij}$ và $m + n$ ẩn phụ), số ràng buộc cũng nhiều ($m + n$ ràng buộc) và việc đó thường dẫn đến những chi phí tính toán không cần thiết. Tuy nhiên lợi dụng cấu trúc đặc biệt của bài toán vận tải ta có thể cụ thể hơn nữa thuật toán đơn hình và thu được thuật toán đơn giản và hiệu quả để giải nó.

**Định lý 4.1.1.** *Điều kiện cân bằng thu phát* ($\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$) *là điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải có phương án tối ưu.*

*Chứng minh.* Giả sử bài toán vận tải có phương án tối ưu $X^* = (x^*_{ij})$, khi đó
$$\sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} = b_j,\ (j = 1, .., n)\quad \sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = a_i\ (i = 1, ..., m)$$

Vì vậy
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ngược lại, giả sử có $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, ta cần chứng minh bài toán vận tải có phương án tối ưu, tức là cần chứng minh tập hợp các phương án của bài toán khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới. Thật vậy, đặt $Q = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j > 0$, xét véc tơ $\overline{X} = (\frac{a_i b_j}{Q})$ $(i = 1, .., m; j = 1, .., n)$ có thành phần $\overline{x_{ij}} = \frac{a_i b_j}{Q}$

Ta có
$$\sum_{j=1}^{n} \overline{x_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{Q} = a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{Q} = a_i\ (i = 1, .., m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{Q} = b_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{Q} = b_j\ (j = 1, .., n)$$

và rõ ràng $\overline{x_{ij}} \geq 0,\ \forall i = 1, .., m; j = 1, .., n$. Vậy $\overline{X}$ là một phương án của bài toán vận tải, tức là bài toán vận tải có tập hợp các phương án khác rỗng.

Xét phương án bất kỳ của bài toán $X = (x_{ij}),\ (i = 1, .., m; j = 1, .., n)$. Từ điều kiện các $x_{ij} \geq 0$ và $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ suy ra
$$0 \leq x_{ij} \leq a_i\ \ (i = 1, .., m; j = 1, .., n).$$

Vì vậy
$$\begin{cases} c_{ij}x_{ij} \geq 0 & \text{nếu } c_{ij} \geq 0 \\ c_{ij}x_{ij} \geq c_{ij}a_{ij} & \text{nếu } c_{ij} < 0 \end{cases}$$

suy ra $c_{ij}x_{ij} \geq \min\{0, c_{ij}a_{ij}\}\ \ (i = 1, .., m; j = 1, .., n)$.

Do đó $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \min\{0, c_{ij}a_{ij}\} = const$. Vậy hàm mục tiêu bị chặn d]ới trên miền chấp nhận được, suy ra bài toán có phương án tối ưu □

## 4.2. Bảng vận tải

Để nghi các số liệu của baid toán vận tải và để giải nó bằng các thuật toán trình bày trong các mục tiếp theo, ta xây dựng một bảng gồm $m+1$ dòng và $n+1$ cột như sau:

| $A_i$ \ $B_j$ | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_j$ | ... | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | .... | $c_{1j}$ $x_{1j}$ | .... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | .... | $c_{2j}$ $x_{2j}$ | .... | $c_{2n}$ $x_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| $a_i$ | $c_{i1}$ $x_{i1}$ | $c_{i2}$ $x_{i2}$ | .... | $c_{ij}$ $x_{ij}$ | .... | $c_{in}$ $x_{in}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| $a_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | .... | $c_{mj}$ $x_{mj}$ | .... | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Trong bảng mỗi hàng đặc trưng cho một điểm phát, mỗi cột đặc trưng cho một điểm thu: hàng trên cùng ghi các $b_j$ $(j = 1, ..n)$, cột đầu tiên ghi các $a_i$ $(i = 1, .., m)$. Trừ hàng trên cùng và cột đầu tiên, phần cong lại gọi là phần chính của ảng vận tải. Ô nằm trên hàng $i$, cột $j$ đặc trưng cho đường chuyền từ $A_i$ đến $B_j$ gọi là ô $(i, j)$. Phần chính của bảng vận tải là $U = \{(i, j) : \ (i = 1, .., m; j = 1, .., n)\}$. Mỗi ô $(i, j)$ trong phần chính của bảng vận tải ta ghi cước phí vận chuyển $c_{ij}$ vào góc trên phía trái và lượng vận chuyển $x_{ij}$ trong phương án $X$ vào góc dưới phía phải.

**Định nghĩa 4.2.1.** *Những ô $(i, j) \in U$ với $x_ij > 0$ gọi là những ô được chọn ứng với phương án $X$. Nhưng ô còn lại là những ô bị loại.*

Ô được chọn đặc trưng cho tuyến đường có vận tải hàng hóa qua.

**Định nghĩa 4.2.2.** *Một dãy các ô $(i, j) \in U$ mà hai ô (và không quá 2) liên tiếp của dãy luôn nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột gọi là dây chuyền.*

| $A_i \backslash B_j$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | | X | X |
| $a_2$ | X | | X |
| $a_3$ | X | | |

**Ví dụ 4.2.1.** Trong bảng

Dãy các ô $(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1)$ lập thành một dây chuyền.

**Định nghĩa 4.2.3.** *Một dây truyền khép kín gọi là một vòng (hoặc một chu trình).*

| $A_i \backslash B_j$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | | X | | X |
| $a_2$ | X | | | X |
| $a_3$ | X | X | | |

**Ví dụ 4.2.2.**

Dãy các ô $(1,2),(1,4),(2,4),(2,1),(3,1),(3,2)$ tạo thành một vòng. Như vậy, một tập hợp được sắp thứ tự các ô của phần chính trong bảng vận tải tạo thành một vòng nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- Hai ô cạnh nhau nằm trên cùng một hàng hoặc một cột.
- Không có ba ô nào nằm trên cùng một hàng hoặc một cột
- Ô đầu tiên nằm trên cùng một hàng hay một cột với ô cuối cùng.

Giả sử $L \subset U$ là một tập hợp các ô nào đó của bảng vận tải.

**Định nghĩa 4.2.4.** *Ta nói rằng $L$ là chứa vòng nếu từ các ô của $L$ ta có thể xây dựng được ít nhất một vòng. Ngược lại, nói rằng $L$ không chứa vòng.*

Ta có thể nhận được tập $L \subset U$ có chứa vòng hay không nhờ định lý sau:

**Định lý 4.2.1.** *Nếu trong mỗi dòng và cột của bảng vận tải hoặc không có ô nào của $L$ hoặc có ít nhất hai ô của $L$ thì $L$ chứa vòng.*

*Chứng minh.* Bắt đầu từ ô nào đó $(i_1, j_1) \in L$. Vì trên dòng $i_1$ còn ít nhất một ô của $L$, chẳng hạn $(i_1, j_2)$, nên ta di chuyển theo dòng $i_1$ đến ô đó. Vì $(i_1, j_2)$ không phải là ô duy nhất của $L$ trên cột này nên ta di chuyển theo cột $j_2$ đến ô $(i_2, j_2) \in L$ nằm trên cột này. Tiếp tục từ ô $(i_2, j_2)$ ta di chuyển theo dòng $i_2$ đến ô khác của $L$ thuộc cột khác của bảng vận tải... Quá trình này không thể kéo dài vô tận vì $L \subset U$ gồm hữu hạn các ô, vì vậy đến một bước nào đó ta sẽ qua lại một ô mà ta đã đi qua, tức là đã phát hiện một vòng. □

Khái niệm vòng liên quan rất chặt chẽ với tính độc lập tuyến tính của các véc tơ cột $A_{ij}$ của ma trận ràng buộc $A$ trong bài toán vận tải.

**Định nghĩa 4.2.5.** *Tập $L \subset U$ các ô của bảng vận tải được gọi là độc lập tuyến tính (phụ thuộc tuyến tính) nếu các véc tơ cột $\{A_{ij},\ (i,j) \in L\}$ của ma trận $A$ lập thành một hệ độc lập tuyến tính (phụ thuộc tuyến tính)*

**Định lý 4.2.2.** *Tập $L \subset U$ các ô của bảng vận tải là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi nó không chứa vòng.*

*Chứng minh.* Giả sử $L$ độc lập tuyến tính. Cần chứng minh $L$ không chứa vòng. Giả sử ngược lại, $L$ chứa vòng $V$ là một vòng trong nó. Điền vào các ô trong vòng $V$ các số $+\theta$, $-\theta$ một cách xen kẽ nhau (tức là sao cho không có hai ô cạnh nhau nào của $V$ lại được điển cùng một số giống nhau) và điền 0 vào tất cả các ô còn lại. Khi $\theta = 1$ thì tổng các số đã điền trong mỗi hàng và mỗi cột của bảng vận tải đều bằng 0. Điều đó có nghĩa là nếu ta đem các cột của ma trận $A$ tương ứng với các ô được điền $+\theta$ trong $V$ nhân với 1 và các cột của $A$ tương ứng với các ô được điền $-\theta$ trong $V$ nhân với $-1$, các cột cong lại nhân với 0 rồi cộng tất cả lại ta được véc tơ không. từ đó suy ra các véc tơ cột $A_{ij}$ của $A$ ứng với $(i,j) \in L$ lập thành một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính, trái với giả thiết độc lập tuyến tính.

Ngược lại, giả sử $L$ không chứa vòng, cần chứng minh $L$ độc lập tuyến tính.

Giả sử ngược lại, $L$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\lambda_{ij}$, $(i,j) \in L$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\sum_{(i,j)\in L} \lambda_{ij} A_{ij} = 0$$

Điều này có nghĩa là nếu điền các số $\lambda_{ij}$, $(i,j) \in L$ trong biểu diễn trên vào các ô tương ứng của bảng vận tải, các ô khác điền số 0. Khi đó, tổng các số trong các ô được điền trong mỗi dòng và mỗi cột của bảng vận tải thu được đều bằng 0.

Kí hiệu $K$ là tập các ô của bảng vận tải với các số được điền khác 0:

$$K = \{(i,j) : \lambda_{ij} \neq 0\}$$

Do tổng các số được điền trong mỗi dòng và mỗi cột của bảng vận tải đều bằng 0, nên mỗi dòng và mỗi cột của nó hoặc không chứa ô nào của $K$ hoặc phải chứa ít nhất hai ô của $K$. Theo định lý *4.2.1*, khi đó $K$ phải là vòng. Vì $K \subset L$ nên suy ra $L$ chứa vòng, trái giả thiết . Vậy $L$ độc lập tuyến tính. Định lí được chứng minh. □

Ký hiệu $G(X)$ là tập các ô được chọn trong bảng vận tải ứng với phương án $X$ :

$$G(X) = \{(i,j) : x_{ij} > 0\}$$

**Hệ quả 4.2.1.** *Phương án $X = (x_{ij})$ của bài toán vận tải là phương án cơ sở chấp nhận được khi và chỉ khi tập các ô chọn $G(X)$ tương ứng với nó không chứa vòng.*

*Chứng minh.* Ta biết rằng phương án $X = (x_{ij})$ của bài toán là phương án cơ sở chấp nhận được khi và chỉ khi các véc tơ cột của ma trận ràng buộc $A$ ứng với các thành phần khác không của nó lập thành hệ độc lập tuyến tính. Theo định lý *4.2.1*, điều đó tương đương với $G(x)$ không chứa vòng. □

Vì $rankA = m + n - 1$ nên phương án cơ sở chấp nhận được là không suy biến nếu số ô chọn $m + n - 1$. Trong trường hợp suy biến, ta có thể bổ sung một số ô loại sao cho phương án cơ sở chấp nhận được có $m + n - 1$ ô được chọn. Các ô loại được bổ sung này gọi là các "ô chọn 0." Ta thấy điều này tương ứng định nghĩa nêu trong bài toán quy hoạch tuyến tính: Phương án cơ sở chấp nhận được là không suy biến nếu số véc tơ cột của $A$ tương ứng với thành phần dương của nó (Khi đó các véc tơ cột này lập thành một hệ độc lập tuyến tính) đúng bằng $rankA$. Do đó ứng với mỗi phương án cơ sở chấp nhận được có duy nhất một cơ sở. Trường hợp số véc tơ đó nhỏ hơn $rankA$ thì phương án cơ sở chấp nhận được đó gọi là suy biến và ta có thể bổ sung một số cột của $A$ vào hệ véc tơ đó để được hệ gồm đúng $rankA$ các véc tơ độc lập tuyến tính. (Tương ứng với một phương án cơ sở chấp nhận được có nhiều hơn một cơ sở).

**Hệ quả 4.2.2.** *Giả sử ta có bảng vận tải m hàng, n cột và L là một tập gồm m+n-1 ô của bảng không chứa vòng. Giả sử ô $(i,j)$ của bảng không thuộc L. Nếu ta bổ sung ô $(i,j)$ vào L để được $L_1$ thì $L_1$ chứa một vòng duy nhất V. Cuối cùng, nếu loại khỏi $L_1$ một ô tùy ý của vòng $V$ để được $L_2$ thì $L_2$ lại gồm $m + n - 1$ ô của bảng không chứa vòng.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | X | X | X |
| | | X | |
| | X | | |
| | | X | X |

**Ví dụ 4.2.3.** Cho bảng 4 hàng, 4 cột và tập $L$ gồm $4 + 4 - 1 = 7$ ô không chứa vòng có đánh dấu "X" còn ô $(4,4)$ là ô không thuộc $L$, tức là

$$L = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3)\}$$
$$L_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,2),(4,3),(4,4)\}$$

thì $L_1$ chứa duy nhất vòng $V = \{(1,3),(1,4),(4,4),(4,3)\}$. Vì $V$ là vòng duy nhất, nên nếu bỏ đi một ô nào đó của $V$ thì sẽ mất vong nên $L_2$ gồm 7 ô của bảng không chứa vòng.

## 4.3. Cách phá vỡ và xây dựng vòng

Cho $X$ là một phương án của bài toán vận tải. Lập bảng vận tải tương ứng với $X$ đó. Nếu tập các ô được chọn $G(X)$ không chứa vòng thì $X$ là phương án cơ sở chấp nhận được. Nếu $G(X)$ chứa vòng thì ta phải tìm cách phá vỡ các vòng trong nó tức là tìm cách xây dựng từ phương án $X$ phương án không chứa vòng, nói cách khác xây dựng phương án cơ sở chấp nhận được.

**Định lý 4.3.1.** *Giả sử $X$ là phương án của bài toán vận tải và $G(X)$ chứa vòng. Khi đó, từ phương án $X$ ta luôn có thể chuyển sang một phương án mới $\overline{X}$ không tồi hơn $X$ (tức là $f(\overline{X}) \leq f(X)$) với tập các ô chọn $G(\overline{X})$ không chứa vòng.*

*Chứng minh.* Giả sử $G(X)$ chứa vòng $V$. Đánh dấu các ô trong $V$ bởi các dấu $+$ và $-$ sao cho không có hai ô cạnh nhau nào của $V$ lại được đánh cùng một dấu. Gọi $V^+$ là tập các ô trong $V$ được đánh dấu $+$, $V^-$ là tập các ô được đánh dấu $-$. Không giảm tổng quát ta có thể coi

$$\sum_{(i,j)\in V^+} c_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in V^-} c_{ij} \tag{6}$$

Xây dựng véc tơ $\overline{X} = (\overline{x_{ij}})$ theo công thức

$$\overline{x_{ij}} = \begin{cases} x_{ij} + \theta & \text{nếu } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - \theta & \text{nếu } (i,j) \in V^- \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases} \tag{7}$$

trong đó $\theta = \min\{x_{ij},\ (i,j) \in V^-\}$.

Rõ ràng $\overline{x_{ij}} \geq 0,\ \forall(i,j)$, ngoài ra do $V$ là vòng nên từ (7) ta có

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{x_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ (i = 1, ..., m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (j = 1, ..., n)$$

Vậy $X$ là phương án của bài toán vận tải.

Ta lại có

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\overline{x_{ij}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \theta(\sum_{(i,j)\in V^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in V^-} c_{ij})$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = f(X).$$

Từ (7) và cách xác định $\theta$ nên sẽ có ít nhất ô $(i_0, j_0) \in V^-$ để $\theta = x_{i_0,j_0}$, do đó $\overline{i_0, j_0} = 0$ và ô $(i_0, j_0) \in V^-$ sẽ không là ô chọn nữa. Do đó trong $G(\overline{X})$ không có mặt trong vòng $V$ nữa.

Nếu $G(\overline{X})$ vẫn không còn chứa vòng thì thay $X$ bằng $\overline{X}$ và lặp lại thủ tục vừa nêu trên thì sau một số hữu hạn bước lặp ta phải đến một phương án không tồi hơn phương án đã qua và tập hợp các ô chọn tương ứng không chứa vòng. Định lí được chứng minh. □

**Định lý 4.3.2.** *Giả sử $m, n \geq 2$. Khi đó tập $L$ gồm $m + n$ ô bất kỳ của bảng vận tải luôn chứa vòng.*

*Chứng minh.* Vì $rankA = m + m - 1$ nên tập $L$ gồm $m + n$ ô của bảng vận tải thì phụ thuộc tuyến tính do đó theo định lý *4.2.2* nó chứa vòng. □

Từ định lý *4.3.2* ta có thủ tục xây dựng vòng từ tập $L$ gồm $m + n$ ô của bảng vận tải như sau:

1) Xóa bỏ khỏi bảng vận tải tất cả các dòng và cột chứa không quá một ô của $L$. Việc này được lặp lại cho tới khi được bảng vận tải mà mỗi dòng và cột của nó chứa ít nhất 2 ô của $L$.

2) Từ bảng thu được, vòng có thể xây dựng theo thủ tục mô tả trong định lý *4.2.1*.

**Ví dụ 4.3.1.** Xây dựng vòng từ các ô được đánh dấu "X" trong bảng sau:

Bỏ cột 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (vì chứa 1 ô đánh dấu X)

Bỏ hàng 2, ta được

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | | X | | | | | X | X | |
| 2 | | X | X | | | X | X | | | |
| 3 | | | | X | X | | | X | | X |
| 4 | | | | | | | | | X | X |

| | 3 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | X | X | |
| 2 | X | | | |
| 3 | | X | | X |
| 4 | | | X | X |

| | 3 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | X | X | |
| 3 | | X | | X |
| 4 | | | X | X |

| | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| 1 | X | X | |
| 3 | X | | X |
| 4 | | X | X |

Bỏ cột 3, ta được

Ta thu được vòng

$$V = \{(1,8)^+, (1,9)^-, (4,9)^+, (4,10)^-, (3,10)^+, (3,8)^+\}$$

## 4.4. Tìm phương án cơ sở xuất phát

Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, việc tìm phương án cơ sở xuất phát đòi hỏi phải giải một bài toán quy hoạch tuyến tính phụ (pha thứ nhất trong phương pháp hai pha). Công việc này đòi hỏi một khối lượng tính toán không nhỏ. Tuy nhiên, do đặc thù riêng của mình, đối với bài toán vận tải hiện nay có khá nhiều phương pháp rất hiệu quả để tìm một phương án cơ xở chấp nhận được cho nó. Trong mục này giới thiệu hai phương pháp phổ biến nhất.

## 4.4.1. Phương pháp góc tây bắc

Lập bảng vận tải, các số liệu $a_i, b_i, c_j$ $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$ được ghi vào bảng như đã mô tả mục trước.

Bắt đầu từ ô $(1, 1)$ nằm ở góc trên bên trái của bảng (ô này nằm ở vị trí góc tây bắc của bảng và tên gọi của phương pháp cũng xuất phát từ đây) ta tiến hành phân phối lượng hàng vào ô này.

$$x_{11} = \min\{a_{1,b_1}\}$$

các lượng thu phát cong lại là:

$$a_i^{'} = a_i \ (i \neq 1); a_1^{'} = a_1 - x_{11}, \ b_j^{'} = b_j \ (j \neq 1); b_1^{'} = b_1 - x_{11}$$

nếu $x_{11} = a_1 = \min\{a_{1,b_1}\}$ thì $a_1^{'} = 0$ khi đó ta xóa dòng thứ nhất của bảng và ta thu được bảng mới gồm $m - 1$ dòng và $n$ cột với lượng tương ứng là $a_i^{'}$ $(i = 2, ..., m)$; $b_j^{'}$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

Lặp lại cách phân phối như vậy đối với bảng mới, tức là bắt đầu từ góc tây bắc và phân phối lượng hàng vận chuyển vaof ô này sao cho hoặc chở hết hàng ở điểm phát hoặc đáp ứng hết nhu cầu của điểm thu tương ứng với nó.

Như vậy, sau mỗi lần phân phối ta lại xóa đi một dòng (hoặc một cột) của bảng nên sau đúng $m + n - 1$ lần phân phối thủ tục trên phải kết thúc. Do đó phương án xây dựng theo phương pháp góc tây bắc sẽ không quá $m + n - 1$ thành phần khác không.

**Ví dụ 4.4.1.** Xây dựng phương án vận tải cho bài toán vận tải theo phương pháp góc tây bắc với số liệu cho bảng sau:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ 20 | $B_2$ 40 | $B_3$ 30 |
|---|---|---|---|
| $A_1 : 30$ | 1 / 20 | 3 / 10 | 5 |
| $A_2 : 25$ | 5 | 4 / 25 | 2 |
| $A_3 : 35$ | 8 | 5 / 5 | 4 / 30 |

Phân tích:

- Phân cho ô $(1, 1)$ : 20, xóa cột 1; ở $A_1$ còn 10
- Phân cho ô $(1, 2)$ : 10, xóa hàng 1; ở $B_2$ còn 30
- Phân cho ô $(2, 2)$ : 25, xóa hàng 2; ở $B_2$ còn 5

- Phân cho ô $(3,2)$ : 5, xóa cột 2; ở $A_3$ còn 30
- Phân cho ô $(3,3)$ : 30

Ta được phương án cơ sở xuất phát là: $X = (20, 10, 0, 0, 25, 0, 0, 5, 30)$ và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là $f(X) = 1.20+3.10+4.25+5.5+4.30 = 295$

## 4.4.2. Phương pháp cực tiểu cước phí

Phương pháp này ta ưu tiên phân phối nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên toàn bảng. Giả sử trong ma trận cước phí $C = (c_{ij})_{m\times n}$ có $c_{rs}$ la nhỏ nhất trong các $c_{ij}$. Khi đó ta phân phối tối đa vào ô $(rs)$ cụ thể là

$$x = \begin{cases} a_r \text{ nếu } a_r \le b_s & (*) \\ b_s \text{ nếu } a_r > b_s & (**) \end{cases}$$

Trong trường hợp $(*)$ điểm $A_r$ đã phát hết hàng nên có thể xóa hàng $r$ của bảng ở điểm thu $B_s$ chỉ còn cần $b_s - a_s$ đơn vị hàng.

Trong trường hợp $(**)$ điểm thu $B_s$ đã nhận đủ hàng nên có thể xóa đo cột $s$ của bảng và điểm phát $A_r$ chỉ còn lại $b_r - a_s$ đơn vị hàng. Trong bảng còn lại với số hàng và cột ít hơn, ta lập lại các phân phối trên cho tới khi hết hàng hoặc đáp ứng đủ yêu cầu của các điê,r thu.

Các ô chọn còn lại sẽ không chứa vòng và là phương án cơ sở chấp nhận được. Nếu chưa đủ $m + n - 1$ ô thì ta bổ sung thêm ô số "ô chọn 0" cho đủ $m + n - 1$ ô không tạo vòng.

**Ví dụ 4.4.2.** Xây dựng phương án vận tải theo phương pháp cực tiểu cước phí với số liệu cho trong bảng:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ 20 | $B_2$ 40 | $B_3$ 30 |
|---|---|---|---|
| $A_1$ : 30 | 1 / 20 | 3 / 10 | 5 |
| $A_2$ : 25 | 5 | 4 | 2 / 25 |
| $A_3$ : 35 | 8 | 5 / 30 | 4 / 5 |

Phân tích

- Phân cho ô $(1,1)$ là ô có cước phí nhỏ nhất: 20 đơn vị hàng, xóa cột 1.
- Phân cho ô $(2,3)$ : 25 đơn vị hàng, xóa dòng 2.

- Phân cho ô $(1, 2)$ : 10 đơn vị hàng, xóa hàng 1.
- Phân cho ô $(3, 3)$ : 5 đơn vị hàng, xóa cột 3.
- Phân cho ô $(3, 2)$ : 30 đơn vị hàng.

Ta được phương án cơ sở xuất phát là: $X = (20, 10, 0, 0, 0, 25, 0, 0, 30, 5)$ và giá trị hàm mục tiêu tương ứng của bằng: $f(X) = 1.20 + 3.10 + 2.25 + 5.30 + 4.5 = 270$.

# 4.5. Các thuật toán giải bài toán vận tải

## 4.5.1. Thuật toán quy 0 cước phí các ô chọn

Ta có nhận xét sau: Nếu cộng vào hàng $i$ của ma trận cước phí $C = (c_{ij})m \times n$ số $r_i$ tùy ý $(i = 1, .., m)$ và cộng vào cột $j$ của nó số $s_j$ tùy ý $(j = 1, ..., n)$ thì ta có bài toán vận tải mới với ma trận cước phí $\overline{C} = (\overline{c_{ij}})^{m\times n}$ (trong đó $\overline{c_{ij}} = c_{ij} + r_i + s_j$) tương đương với bài toán ban đầu (tức là phương án tối ưu của bài toán này cũng là phương án tối ưu của bài toán ban đầu và ngược lại). Thật vậy giá trị hàm mục tiêu trong bài toán mới là:

$$\begin{aligned}
\overline{f}X &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + r_i + s_j)x_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} r_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\\
&= f(x) + \sum_{i=1}^{m} r_i a_i + \sum_{j=1}^{n} s_j b_j = f(x) + C.
\end{aligned}$$

trong đó $C = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} s_j b_j$ là hằng số.

Giá trị hàm mục tiêu chỉ khác nhau một hằng số nên điểm cực trị của chúng trùng nhau.

Từ những điều đã chứng minh ở mục 3.2 và nhận xét nêu trên ta có thuật toán quy 0 cước phí. Thuật toán gồm ba bước

*Bước 1.* Giả sử ta đã có một phương án cơ sở chấp nhận được ban đầu với $m + n - 1$ ô chọn (trong đó có thể có một số ô chọn 0). Ta cộng vào hàng $i$ của ma trận cước phí $C = (c_{ij})_{m\times n}$ số $r_i$ $(i = 1, .., m)$ và cộng vào cột $j$ của nó số $s_j$ $(j = 1, .., n)$ và chọn các số $r_i$, $s_j$ sao cho ma trận cước phí mới $\overline{C}$ các ô chọn đều có $\overline{c_{ij}} = 0$.

*Bước 2.* Kiểm tra trên chuẩn tối ưu:

1. Nếu sau khi quy 0 các ô chọn mà các ô loại đều có cước phí lớn hơn 0 thì phương án đang xét là phương án tối ưu vì khi đó bất kì ô loại nào vào thay cho bất kỳ ô chọn nào cước phí cũng tăng lên và phương án mới là tồi hơn.

2. Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn mà có ít nhất một ô loại có cước phí âm, thì phương án đang xét không phải tối ưu (vì khi đó nếu thay ô loại có cước phí âm vào ô chọn đã quy 0 cước phí thì cước phí giảm đi). Chuyển sang bước 3.

*Bước 3.* Xây dựng phương án mới tốt hơn:

1. Tìm ô đưa vào: Giả sử ô $(i^*, j^*)$ có cước phí âm nhỏ nhất thì chọn ô $(i^*, j^*)$ làm ô dưa vào.

2. Tìm vòng điều chỉnh: Bổ sung ô $(i^*, j^*)$ vào $m + n - 1$ ô chọn ban đầu sẽ xuất hiện vòng $V$ duy nhất (hệ quả 4.2.2).

3. Đánh dấu các ô của vòng $V$ : Ta đánh dấu các ô của $V$ bắt đầu từ ô $(i^*, j^*)$ đánh dấu $+$, ô tiếp theo đánh dấu $-$ ... sao cho hai ô cạnh nhau của $V$ không đánh cùng một dấu. Khi đó vòng $V$ chia thành hai lớp.

   $V^+$ : các ô được đánh dấu $+$.

   $V^-$ : các ô được đánh dấu $-$.

4. Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh: Giả sử $\min\limits_{(i,j)\in V^-} x_{ij} = x_{i^0j^0}$ khi đó $(i^0, j^0)$ là ô đưa ra và là lượng điều chỉnh $x_{i^0j^0}$ là lượng điều chỉnh.

5. Phương án mới $\overline{X} = (\overline{x_{ij}})_{m\times n}$ được tính như sau:

$$\overline{x_{ij}} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i^0j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - x_{i^0j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^- \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Nhận xét:

+) Ô $(i^0, j^0)$ trước có $x_{i^0j^0}$ đơn vị hàng và được đánh dấu $-$ bị trừ đi $x_{i^0j^0}$ đơn vị hàng thành ô bị loại.

+) Ô $(i^*, j^*)$ trước là ô loại và ở ô đánh dấu $+$ được cộng vào $x_{i^0j^0}$ đơn vị hàng thành ô chọn.

+) $\overline{X} = (\overline{x_{ij}})_{m\times n}$ là phương án vì $\overline{x_{ij}} \geq 0$ và ví mỗi hàng hoặc cột của vòng $V$ đi qua đều có một ô đánh dấu $+$ một ô đánh dấu $-$ nên tổng

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ và } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \tag{8}$$

vẫn không đổi.

+) Phương án $\overline{X}$ là phương án cơ sở chấp nhận được vì các ô chọn không tạo thành vòng (hệ quả 4.2.2). Phương án này tốt hơn vì đã loại ra một ô có cước phí 0 và thay vào ô có cước phí nhỏ hơn 0.

Sau khi có phương án Cơ bản là như vậy sở mới ta quay lại từ bước 1 và sau hữu hạn lần lặp ta sẽ tìm được phương án tối ưu của bài toán, vì bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu và số phương án chấp nhận được là hữu hạn.

**Ví dụ 4.5.1.** Giải bài toán vận tải

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ 20 | $B_2$ 40 | $B_3$ 30 | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ : 30 | 1 X 20 | 3 X 10 | 5 | $r_1 = 0$ |
| $A_2$ : 25 | 5 | 4 | 2 X 25 | $r_2 = 0$ |
| $A_3$ : 35 | 8 | 5 X 30 | 4 X 5 | $r_3 = -2$ |

Dùng phương pháp cực tiểu cước phí như ví dụ trước ta tìm được phương án cơ sở xuất phát $X = (20, 10, 0, 0, 0, 25, 0, 30, 5)$ và có $f(X) = 270$.

*Bước 1.* Quy 0 cước phí ô chọn

Ta cộng vào hàng $i$ số $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$ cột $j$ các số $s_j$ $(j = 1, 2, 3)$ sao cho cước phí các ô chọn (các ô đánh dấu X ở bảng) bằng 0. Để tìm các $r_i, s_j$ ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + r_1 + s_1 = 0 \\ 2 + r_1 + s_2 = 0 \\ 3 + r_2 + s_3 = 0 \\ 4 + r_3 + s_2 = 0 \\ 5 + r_3 + s_3 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình gồm 5 phương trình , 6 ẩn. Cho $r_1 = 0$ ta tìm được $r_2 = 0, r_3 = -2, s_1 = -1, s_2 = -3, s_3 = -2$ ma trận cước phí mới là:

Ta thấy các ô loại đều có cước phí dương.

Vậy phương án $X = (20, 10, 0, 0, 0, 25, 0, 30, 5)$ chính là phương án tối ưu.

**Ví dụ 4.5.2.** Giải bài toán vậnt tải với số liệu cho trong bảng sau bằng phương pháp quy 0 cước phí các ô chọn:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ 20 | $B_2$ 40 | $B_3$ 30 |
|---|---|---|---|
| $A_1$ : 30 | 0 X 20 | 0 X 10 | 3 |
| $A_2$ : 25 | 4 | 1 | 0 X 25 |
| $A_3$ : 35 | 5 | 0 X 30 | 0 X 5 |

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1 : 80$ | $B_2 : 20$ | $B_3 : 60$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 : 50$ | 5 | 4 | 5 X 50 | $r_1 = 6$ |
| $A_2 : 40$ | 3 X 20 | 2 X 20 | 6 | $r_2 = 0$ |
| $A_1 : 70$ | 7 X 60 | 9 | 11 X 10 | $r_3 = -4$ |
| | $s_1 = -3$ | $s = -2$ | $s_3 = -7$ | |

Tìm phương án cơ sở xuất phát (bằng phương pháp cực tiểu cước phí)

- Phân cho ô $(1,3)$ : 50 đơn vị hàng, $B_3$ còn cần 10, xóa hàng 1,
- Phân cho ô $(2,2)$ : 20 đơn vị hàng, $A_2$ còn lại 20, xóa cột 2,
- Phân cho ô $(2,1)$ : 20 đơn vị hàng, $B_1$ còn lại 10, xóa hàng 2,
- Phân cho ô $(3,3)$ : 5 đơn vị hàng, xóa cột 3,
- Phân cho ô $(3,2)$ : 60 đơn vị hàng, $A_3$ còn lại 10, xóa cột 1,
- Phân nốt 10 đơn vị hàng còn lại của $A_3$ vào ô $(3,3)$.

Ta được phương án cơ sở xuất phát là $X = (0,0,50,20,20,0,60,0,10)$ và giá trị hàm mục tiêu là $f(x) = 680$.

*Bước 1.* Quy 0 cước phí ô chọn

Ta cộng vào hàng $i$ số $r_i$ $(i = 1,2,3)$ cột $j$ các số $s_j$ $(j = 1,2,3)$ sao cho cước phí các ô chọn (các ô đánh dấu X ở bảng) bằng 0. Để tìm các $r_i, s_j$ ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + r_1 + s_3 = 0 \\ 3 + r_2 + s_1 = 0 \\ 2 + r_2 + s_2 = 0 \\ 7 + r_3 + s_1 = 0 \\ 11 + r_3 + s_3 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình gồm 5 phương trình , 6 ẩn. Cho $r_2 = 0$ ta tìm được $r_1 = 6, r_3 = -4, s_1 = -3, s_2 = -2, s_3 = -7$ ma trận cước phí mới là:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1 : 80$ | $B_2 : 20$ | $B_3 : 60$ |
|---|---|---|---|
| $A_1 : 50$ | 8 | 8 | 0 X 50 |
| $A_2 : 40$ | 0 X 20 | 0 X 20 | -1 |
| $A_1 : 70$ | 0 X 60 | 3 | 0 X 10 |

*Bước 2.* Kiểm tra điều kiện tối ưu.

Phương án này chưa phải tối ưu vì có ô loại $(2, 3)$ có cước phí âm $(-1 < 0)$

*Bước 3.* Lập phương án mới

1. Tìm ô đưa vào: vì ô $(2, 3)$ là ô loại duy nhất có cước phí âm nên ô $(2, 3)$ là ô đưa vào.

2. Tìm vòng điều chỉnh: Bổ sung thêm ô $(2, 3)$ vào tập các ô chọn ta tìm được vòng $V = \{(2, 3)^+, (3, 3)^-, (3, 1)^+, (2, 1)^-\}$.

3. Đánh dấu các ô của vòng $V : V^+ = \{(2, 3), (3, 1)\}; V^- = \{(3, 3), (2, 1)\}$.

4. Tìm ô đưa ra: $\min\{x_{33}, x_{21}\} = \min\{10, 20\} = 10 = x_{33}$ ô $(3, 3)$ là ô đưa ra, lượng điều chỉnh là $x_{33} = 10$.

5. Lập phương án mới:

$$\overline{x}_{23} = x_{23} + 10 = 0 + 10 = 10; \qquad \overline{x}_{31} = x_{31} + 10 = 60 + 10 = 70;$$
$$\overline{x}_{33} = x_{33} - 10 = 10 - 10 = 0; \qquad \overline{x}_{21} = x_{21} - 10 = 20 - 10 = 10.$$

Lượng hàng ở các ô giữ nguyên. Ta được phương án mới:

$\overline{X} = (0, 0, 50, 10, 20, 10, 70, 0, 0)$ $f(\overline{X}) = 670$. Ta đã có phương án cơ sở chấp nhận được $\overline{X}$. Quay lại bước 1 ta có bảng cước phí tương ứng.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 0 X 50 | $r_1 = -1$ |
| 0 X 10 | 0 X 20 | -1 X 10 | $r_2 = 0$ |
| 0 X 70 | 3 | 0 | $r_3 = -4$ |
| $s_1 = 0$ | $s = 0$ | $s_3 = 1$ | |

Quy 0 các ô chọn

$$\begin{cases} 0 + r_1 + s_3 = 0 \\ 0 + r_2 + s_1 = 0 \\ 0 + r_2 + s_2 = 0 \\ -1 + r_3 + s_1 = 0 \\ 0 + r_3 + s_3 = 0 \end{cases}$$

Cho $r_2 = 0$ ta được $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, r_3 = 0, r_1 = -1$. Ta có ma trận cước phí là:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 7 | 0 X |
| 0 X | 0 X | 0 X |
| 0 X | 3 | 1 |

Ta thấy các ô loại đều có cước phí dương.

Vậy $\overline{X} = (0, 0, 50, 10, 20, 10, 70, 0, 0)$ là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là $f(\overline{X}) = 670$.

## 4.5.2. Thuật toán thế vị

Cơ sở của thuật toán thế vị là các định lý đối ngẫu của cặp bài toán đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính.

Bài toán vận tải tổng quát là:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_ij \to \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,..,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1,..,n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,...,m; j = 1,..,n) \end{cases} \tag{V}$$

Bài toán đối ngẫu với bài toán này là:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_iu_i + \sum\limits_{j=1}^{n} ab_jv_j \\ u_i + v_j \geq c_{ij} \ (i = 1,...,m; j = 1,..,n) \end{cases} \tag{V*}$$

Giả sử ta có phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán $V$ là $X = (x_{ij})_{m\times n}$ với tập các ô chọn $G(X) = \{(i,j) : x_{ij} > 0\}$ gồm $m+n-1$ ô (trong đó có thể có ô có "ô chọn 0"). Nếu tồn tại các $u_i$ $(i = 1,..,m)$, $v_j$ $(j = 1,..,n)$ sao cho $\Delta_{ij} = u_i+v_j-c_{ij} = 0$ với mọi $(i,j) \in G(X)$, tác là có $u_i+v_j-c_{ij} = 0$ với mọi $x_{ij} > 0$ thì $(u_i, v_j)$ đã thỏa mãn định lý về độ lệch bù. Do đó nếu nó là phương án của bài toán đối ngẫu $(V^*)$ thì $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là phương án của bài toán $(V)$. Mà điều kiện để $(u_i, v_j)$ là phương án của bài toán $(V^*)$ là $u_i + v_j \leq c_{ij\ \forall(i,j)}$ ở các ô chọn thỏa mãn. Vì vậy nếu ở các ô loại điều ấy cũng được thỏa mãn thì $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là phương án tối ưu của bài toán vận tải $(V)$.

Vậy ta có điều kiện để phương án $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là phương án tối ưu của bài toán vận tải $(V)$ là $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0 \ \forall(i,j)$. Các số $u_i$ $(i = 1,..,m)$, $v_j$ $(j = 1,..,n)$ nói trên gọi là các thế vị (các $u_i$ $(i = 1,..,m)$ gọi là các thế vị hàng, các $v_j$ $(j = 1,..,n)$ gọi là các thế vị cột).

Từ những phân tích trên, ta có thuật toán thế vị để giải bài toán vận tải gồm các bước sau:

*Bước khởi tạo.* Tìm phương án cơ sở xuất phát $X = (x_{ij})_{m\times n}$ bằng một trong các phương pháp nêu ở mục 4.4. Tập các ô chọn $G(X)$ gồm $m+n-1$ ô và không chứa vòng.

*Bước 1.*

1. Xác định các $u_i$ $(i = 1,..,m)$, $v_j$ $(j = 1,..,n)$ từ hệ phương trình $u_i + v_j = c_{ij}, (i,j) \in G(X)$. Đây là hệ gồm $m+n-1$ phương trình độc lập tuyến tính và có $m+n$ ẩn vì vậy để giải nó ta có thể gán cho một ẩn nào đó một giá trị cố định (chẳng hạn $u_1 = 0$), các ẩn còn lại sẽ được xác định một cách duy nhất theo giá trị của ẩn này.

2. Tính các ước lượng $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},\ forall(i,j)$. (Ta sẽ ghi các ước lượng tính được vào góc dưới bên trái của ô tương ứng trong bài toán vận tải).

3. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Nếu $\Delta_{ij} \le 0\ \forall(i,j)$ thì $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là phương án tối ưu. Nếu $\exists\Delta_{ij} > 0$ thì chuyển sang bước 2.

*Bước 2.*

1. Chọn ô đưa vào $(i_*, j_*)$ thỏa mãn $\Delta_{i_*j_*} = \max\{\Delta_{ij} > 0\}$. Khi đó theo định lí *4.3.2* tập $G(X) \cup (i_*, j_*)$ chứa vòng và rõ ràng vòng này là duy nhất trong nó. Kí hiệu vòng đó là $V$.

2. Đánh dấu các ô trong vong $V$ bởi các dấu $+, -$ bắt đầu từ ô $(i_*, j_*)$ đánh dấu $+$ sao cho hai ô cạnh nhau của vòng không được đánh bởi cùng một dấu. Gọi $V^+$ là tập tất cả các ô của vòng $V$ được đánh dấu $+$, $V^-$ là tập tất cả các ô của vòng $V$ được đánh dấu $-$.

3. Tìm ô đưa ra $(i_0, j_0)$ thỏa mãn: $x_{j_0j_0} = \min\{x_{ij}, (i,j) \in V^-\}$.

4. Xây dựng phương án mới $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})m \times n$ với

$$\overline{x}_{ij} \begin{cases} x_{ij} - x_{i_0j_0} & \text{với } (i,j) \in V^- \\ x_{ij} + x_{i_0j_0} & \text{với } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} & \text{với } (i,j) \notin V \end{cases}$$

khi đó tập các ô chọn của $\overline{X}$ là $G(\overline{X}) \backslash (i_0, j_0) \cup (i_*, j_*)$ không chứa vòng. Thay $X$ bởi $\overline{X}$ và ta lặp lại bước 1.

Nếu bài toán vận tải không suy biến thì sau mỗi bước lặp ta đến một phương án cơ sở mới chấp nhận được không tồi hơn các phương án đã đi qua (định lí 4.3.1). Vì số phương án cơ sở chấp nhận được là hữu hạn nên sau hữu hạn bước lặp ta sẽ nhận được phương án tối ưu.

*Nhận xét.* Trong mỗi bước lặp của thuật toán thế vị khi biến đổi phương án ta không phải làm phép chia nào. Ngoài ra nếu các số $a_i\ (i = 1,..,m), b_j\ (j = 1,..,n)$ là các số nguyên thì phương án xuất phát tìm theo một trong các phương pháp đã nêu (góc tây bắc, cực tiểu cước phí) có các thành phần đều là các số nguyên, do đó bài toán vận tải có phương án tối ưu với các thành phần đều là các số nguyên.

**Ví dụ 4.5.3.** Giải bài toán vận tải cho bằng bảng sau băng thuật toán thế vị

Bằng phương pháp cực tiểu cước phí ta tìm được phương cơ sở chấp nhận được là:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1 : 80$ | $B_2 : 20$ | $B_3 : 60$ |
|---|---|---|---|
| $A_1 : 50$ | 5 | 4 | 1 |
| $A_2 : 50$ | 3 | 2 | 6 |
| $A_3 : 50$ | 7 | 9 | 11 |

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1 : 80$ | $B_2 : 20$ | $B_3 : 60$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 : 50$ | 5<br>-8 | 4<br>-8 | 1<br>X<br>50 | $u_1 = -6$ |
| $A_2 : 40$ | 3<br>X<br>0 20 | 2<br>X<br>0 20 | 6<br>X<br>0 | $u_2 = 0$ |
| $A_3 : 70$ | 7<br>X<br>0 60 | 9<br>-3 | 11<br>X<br>10 | $u_3 = 4$ |
| | $v_1 = 3$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 7$ | |

$X = (0, 0, 50, 20, 20, 0, 60, 0, 10)$ và $f(x) = 680$

Ta đánh dấu $X$ các ô chọn:

*Bước 1.*

1. Xác định các thế vị $u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $v_j$ $(j = 1, 2, 3)$ từ hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1; \quad u_2 + v_1 = 3; \\ u_2 + v_2 = 2; \quad u_3 + v_1 = 7; \quad u_3 + v_3 = 11 \end{cases}$$

cho $u_1 = 0$ ta được $v_1 = 3, v_2 = 2, u_3 = 4, v_3 = 7, u_1 = -6$.

2. Tính các $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ (ghi vào góc trái phía dưới): $\Delta_{11} = -8, \Delta_{12} = -8, \Delta_{13} = 0, \Delta_{21} = 0, \Delta_{22} = 0, \Delta_{23} = 1, \Delta_{31} = 0, \Delta_{32} = -3, \Delta_{33} = 0$.

3. Có $\Delta_{23} > 0$ (và là ô duy nhất). Phương án trên không phải là phương án tối ưu. Ô đưa vào là ô$(2, 3)$ ta có vòng $V = \{(2, 3)^+, (3, 3)^-, (3, 1)^+, (2, 1)^-\}$.

*Bước 2.*

1. Tìm ô đưa ra $x_{i_0j_0} = \min\{x_{33}, x_{21}\} = 10 = x_{33}$ ô đưa ra $(3, 3)$.

2. Xây dựng phương án mới $\overline{x}_{21} = x_{21} - x_{33} = 10$; $\overline{x}_{33} = 0$; $\overline{x}_{23} = 0 + x_{33} = 10$; $\overline{x}_{31} = x_{31} + x_{33} = 70$; các ô khác vẫn giữ nguyên.

Ta có phương án mới là $\overline{X}(0, 0, 50, 10, 20, 10, 70, 0, 0)$. Bảng vận tải tương ứng:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1 : 80$ | $B_2 : 20$ | $B_3 : 60$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 : 50$ | 5 | 4 | 1<br>X<br>50 | $u_1 = -5$ |
| $A_2 : 40$ | 3<br>X<br>20 | 2<br>X<br>20 | 6<br>X<br>10 | $u_2 = 0$ |
| $A_3 : 70$ | 7<br>X<br>70 | 9 | 11 | $u_3 = 4$ |
| | $v_1 = 3$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 6$ | |

*Bước 1.*

1. Xác định các thế vị $u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $v_j$ $(j = 1, 2, 3)$ từ hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1; \quad u_2 + v_1 = 3; \\ u_2 + v_2 = 2; \quad u_2 + v_3 = 6; \quad u_3 + v_1 = 7 \end{cases}$$

cho $u_2 = 0$ ta được $v_1 = 3, v_2 = 2, u_3 = 6, v_3 = -5, u_3 = 4$.

2. Tính các $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ (ghi vào góc trái phía dưới): $\Delta_{11} = -7, \Delta_{12} = -7, \Delta_{13} = 0, \Delta_{21} = 0, \Delta_{22} = 0, \Delta_{23} = 0, \Delta_{31} = 0, \Delta_{32} = -3, \Delta_{33} = -1$.

Ta thấy tất cả $\Delta_{ij} \leq 0 \ (i, j)$.

Vậy phương án tối ưu của bài toán là: $\overline{X}(0, 0, 50, 10, 20, 10, 70, 0, 0)$ và $f(\overline{X} = 670)$.

# 4.6. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Đó là bài toán vận tải mà điều kiện cân bằng thu phát ($\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$) không được thỏa mãn. Khi đó có hai khả năng xảy ra: Hoặc $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ (tức là tổng lượng hàng phát của các điểm phát lớn hơn tổng lượng hàng thu ở các điểm thu) hoặc $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$. Ta xét từng trường hợp:

1. Nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$:

Ta đưa thêm vào điểm thu giả $B_{n+1}$ với lượng hàng thu tương ứng $b_{n+1} = (\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j) > 0$ và xét bài toán vận tải với $m$ điểm phát và $n+1$ điểm thu:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_ij \to \min \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \ (i = 1, .., m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, .., n+1) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, ..., m; j = 1, .., n+1) \\ (\text{ở đây } c_{in+1} = 0 \ \ (i = 1, .., m)) \end{cases}$$

Rõ ràng $\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Nên bài toán trên là bài toán vận tải cân bằng thu phát, vì vậy ta có thể dùng các thuật toán đã trình bày mục trước để giải, ta thu được phương án tối ưu $X^* = (x^*_{ij})$ $(i = 1, .., m;\ j = 1, .., n+1)$ nếu $x^*_{in+1} > 0$ thì điều đó có nghĩa là ta không vận chuyển hết hàng từ các điểm phát $A_i$ ở đó còn tồn đọng lượng hàng là $x^*_{in+1}$.

2. Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$:

Ta đưa thêm biến phát giả $A_{m+1}$ với lượng hàng tương ứng: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. và xét bài toán vận tải với $m+1$ điểm phát và $n$ điểm thu

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ij \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, .., m+1) \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \ (j = 1, .., n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, ..., m+1; j = 1, .., n) \\ (\text{ở đây } c_{m+1j} = 0 \ \ (j = 1, .., n)) \end{cases}$$

Bài toán này cũng là bài toán vận tải cân bằng thu phát,vì vậy ta có thể dùng các thuật toán đã trình bày mục trước để giải, ta thu được phương án tối ưu $X^* = (x^*_{ij})$ $(i = 1, .., m+1;\ j = 1, .., n)$ nếu $x^*_{m+1j} > 0$ thì điều đó có nghĩa là ta không đáp ứng đủ nhu cầu tiêu thụ ở điểm $B_j$, ở đó còn đòi hỏi một lượng hàng là $x^*_{m+1j}$.

# 4.7. Bài toán vận tải có ô bị cấm

Trong thực tế có một số tuyến đường (đặc trưng bởi các ô trong bảng vận tải) không thể chuyển hàng qua được vì những lý do khác nhau chẳng hạn như ngập lụt sau cơn bão hoặc không có phương tiện vận chuyển thích hợp hoặc vì quá xa nên không thể bảo quản được hàng trong quá trình vận chuyển... mà kế hoạc vận tải phải đảm bảo cho một trạm phát nào đó phát hết hàng (chẳng hạn trong trường hợp điểm phát đó có nguy cơ bị ngập lụt..) hoặc một điểm thu nào đó phải thu đủ hàng khi không cân bằng thu phát...

Các ô của bảng vận tải ứng với các tuyến đường mà không thể vận chuyển hàng qua được gọi là các ô bị cấm.

Trong trường hợp này, các cước phí $_{ij}$ ở các ô cấm được thay bằng một số dương đủ lớn $M$ và áp dụng thuật toán giải bài toán vận tải đã trình bày ở trên một cách bình thường. Một cách trực giác thấy rằng nếu trong phương án vận tải có một lượng hàng dương chuyển theo tuyến đường này thì phải chịu một cước phí vô cùng lớn khiến cho phương án tối ưu phải có $x_{ij} = 0$ khi $(i, j)$ là ô cấm tức là các ô cấm phải là các ô loại. Nếu trong phương án tối ưu có ít nhất một ô cấm là ô chọn thì bài toán vận tải không có phương án.

Trong thực hành không cần xác định cụ thể của $M$ mà chỉ lần lưu ý rằng $M$ lớn hơn bất kì số nào cần so sánh với nó.