TOÁN CAO CẤP

Vũ Văn Đồng

Khoa KHCB-KTCS
Cao đẳng Công nghiệp Phúc Yên

10/10/2010

TOÁN CAO CẤP

Vũ Văn Đồng

Khoa KHCB-KTCS
Cao đẳng Công nghiệp Phúc Yên

10/10/2010

Mục lục

1. Giới thiệu môn học

- Toán cao cấp là một trong những môn học cơ sở thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương, được giảng dạy cho tất cả sinh viên thuộc khối ngành kinh tế và kỹ thuật. Trong Trường Cao đẳng Công nghiệp Phúc yên môn Toán cao cấp được giảng dạy cho tất cả sinh viên hệ cao đẳng và dạy vào kì thứ nhất của khóa học.

1. Giới thiệu môn học

- Toán cao cấp là một trong những môn học cơ sở thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương, được giảng dạy cho tất cả sinh viên thuộc khối ngành kinh tế và kỹ thuật. Trong Trường Cao đẳng Công nghiệp Phúc yên môn Toán cao cấp được giảng dạy cho tất cả sinh viên hệ cao đẳng và dạy vào kì thứ nhất của khóa học.
- Toán cao cấp giải quyết nhiều bài toán thực tế.

1. Giới thiệu môn học

- Toán cao cấp là một trong những môn học cơ sở thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương, được giảng dạy cho tất cả sinh viên thuộc khối ngành kinh tế và kỹ thuật. Trong Trường Cao đẳng Công nghiệp Phúc yên môn Toán cao cấp được giảng dạy cho tất cả sinh viên hệ cao đẳng và dạy vào kì thứ nhất của khóa học.
- Toán cao cấp giải quyết nhiều bài toán thực tế.
- Toán cao cấp là công cụ để xét một số vấn đề gặp trong các môn chuyên ngành .

1. Giới thiệu môn học

- Toán cao cấp là một trong những môn học cơ sở thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương, được giảng dạy cho tất cả sinh viên thuộc khối ngành kinh tế và kỹ thuật. Trong Trường Cao đẳng Công nghiệp Phúc yên môn Toán cao cấp được giảng dạy cho tất cả sinh viên hệ cao đẳng và dạy vào kì thứ nhất của khóa học.
- Toán cao cấp giải quyết nhiều bài toán thực tế.
- Toán cao cấp là công cụ để xét một số vấn đề gặp trong các môn chuyên ngành .

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.
- Tài liệu tham khảo :

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.
- Tài liệu tham khảo :
- 1. *Bài giảng Toán cao cấp*, Nguyễn Thị Minh Thúy, Nguyễn Minh Tú, Đặng Đức Quân, Vũ Văn Đồng, Phạm Thị Hồng Hạnh.

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.
- Tài liệu tham khảo :
- 1. *Bài giảng Toán cao cấp*, Nguyễn Thị Minh Thúy, Nguyễn Minh Tú, Đặng Đức Quân, Vũ Văn Đồng, Phạm Thị Hồng Hạnh.
- 2. *Toán cao cấp*, Nguyễn Văn Khuê, NXB KHKT, 1998

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.
- Tài liệu tham khảo :
- 1. *Bài giảng Toán cao cấp*, Nguyễn Thị Minh Thúy, Nguyễn Minh Tú, Đặng Đức Quân, Vũ Văn Đồng, Phạm Thị Hồng Hạnh.
- 2. *Toán cao cấp*, Nguyễn Văn Khuê, NXB KHKT, 1998
- 3. *Toán học cao cấp*, Nguyễn Đình Trí, NXBGD, 2001

2. Giới thiệu môn học

- Bài giảng "Toán cao cấp" này bao gồm :
  1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính,
  2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính,
  3. Phép tính vi phân,
  4. Phép tính tích phân,
  5. Phương trình vi phân.
- Tài liệu tham khảo :

- 1. *Bài giảng Toán cao cấp*, Nguyễn Thị Minh Thúy, Nguyễn Minh Tú, Đặng Đức Quân, Vũ Văn Đồng, Phạm Thị Hồng Hạnh.
- 2. *Toán cao cấp*, Nguyễn Văn Khuê, NXB KHKT, 1998
- 3. *Toán học cao cấp*, Nguyễn Đình Trí, NXBGD, 2001

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận
- Định thức

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận
- Định thức
- Ma trận nghịch đảo

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận
- Định thức
- Ma trận nghịch đảo
- Hạng của ma trận

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận
- Định thức
- Ma trận nghịch đảo
- Hạng của ma trận
- Hệ phương trình tuyến tính

Chương 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

- Ma trận
- Định thức
- Ma trận nghịch đảo
- Hạng của ma trận
- Hệ phương trình tuyến tính

1.1. Ma trận

1.3. Ma trận nghịch đảo

1.4. Hạng của ma trận

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector
- Ánh xạ tuyến tính

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector
- Ánh xạ tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho $V \neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V} \times V \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{a+b}{V}$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \rightarrow & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \rightarrow & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \rightarrow x + y \in V$,

2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{matrix} V \times V \to V, \\ (a,b) \longmapsto a+b \end{matrix}$ Phép nhân : $\begin{matrix} \mathbb{R} \times V \to V. \\ (k,a) \longmapsto ka \end{matrix}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\rightarrow} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \rightarrow x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists (-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V,$
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x,$
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z,$
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists (-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta,$
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V,$

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists(-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta$,
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V$,
7) $k(x + y) = kx + ky \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$,

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V,$
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x,$
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z,$
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists(-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta,$
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V,$
7) $k(x + y) = kx + ky \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V,$
8) $(k + l)x = kx + lx \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \quad x \in V,$

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V,$
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x,$
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z,$
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists (-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta,$
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V,$
7) $k(x + y) = kx + ky \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V,$
8) $(k + l)x = kx + lx \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \quad x \in V,$
9) $k(lx) = (kl)x,$

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V, \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$ Phép nhân : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V. \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists (-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta$,
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V$,
7) $k(x + y) = kx + ky \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$,
8) $(k + l)x = kx + lx \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \quad x \in V$,
9) $k(lx) = (kl)x$,
10) $1x = x$.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Định nghĩa

Cho V $\neq \emptyset, \mathbb{R}$ là tập số thực. Trên V ta định nghĩa hai phép toán cộng hai phần tử và phép nhân một số thực với một phần tử của V như sau :

Phép cộng : $\underset{(a,b)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{a+b}{V}$, Phép nhân : $\underset{(k,a)}{\mathbb{R} \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{ka}{V}$.

Nếu V cùng hai phép toán trên thỏa mãn các tiên đề sau :

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$,
2) $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$,
3) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$,
4) $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hòa),
5) $\forall x \in V : \exists(-x) \in V$sao cho : $x + (-x) = \theta$,
6) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad x \in V : \quad kx \in V$,
7) $k(x + y) = kx + ky \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$,
8) $(k + l)x = kx + lx \quad \forall k, l \in \mathbb{R}, \quad x \in V$,
9) $k(lx) = (kl)x$,
10) $1x = x$.

Thì V được gọi là không gian vector trên $\mathbb{R}$, mỗi phần tử của V được gọi là một vecor.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

$$(+) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$(.) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$$

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

$$(+) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$(.) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$$

Là không gian vector.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

$$(+) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$(.) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$$

Là không gian vector.

Ví dụ 2.3

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

$$(+) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$(.) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$$

Là không gian vector.

Ví dụ 2.3

$W = \{f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(0) = 1\}$ với phép cộng hai

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Ví dụ 2.1

$\mathbb{R}$- không gian vector.

Ví dụ 2.2

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a = (x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán :

$$(+) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$(.) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (k,a) & \longmapsto & ka \end{array}$$

Là không gian vector.

Ví dụ 2.3

$W = \{f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(0) = 1\}$ với phép cộng hai

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.
- Phần tử đối xứng của $x \in V$ là duy nhất.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.
- Phần tử đối xứng của $x \in V$ là duy nhất.
- $\forall x \in V : -x = (-1)x$.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.
- Phần tử đối xứng của $x \in V$ là duy nhất.
- $\forall x \in V : -x = (-1)x$.
- $\forall k \in \mathbb{R} : k\theta = \theta$.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.
- Phần tử đối xứng của $x \in V$ là duy nhất.
- $\forall x \in V : -x = (-1)x$.
- $\forall k \in \mathbb{R} : k\theta = \theta$.
- $\forall x \in V, \quad \forall k \in \mathbb{R} : kx = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $x = \theta$.

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

Tính chất

- Phần tử θ (trung hòa) của không gian vector là duy nhất.
- Phần tử đối xứng của $x \in V$ là duy nhất.
- $\forall x \in V : -x = (-1)x$.
- $\forall k \in \mathbb{R} : k\theta = \theta$.
- $\forall x \in V, \quad \forall k \in \mathbb{R} : kx = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $x = \theta$.

*) Chú ý :

$\forall x, y \in V : x - y = x + (-y) \qquad x = y \Leftrightarrow x - y = \theta.$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} =$$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Phép cộng trong $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} =$$
$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Phép cộng trong $\mathbb{R}^n$

  Xét hai phần tử

  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, phép cộng và là một phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$, kí hiệu $x + y$ và được xác định :

  $$x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_r$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

- Phép cộng trong $\mathbb{R}^n$
  Xét hai phần tử
  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, phép cộng và là một phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$, kí hiệu $x + y$ và được xác định :

  $$x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_r$$

- Phép nhân trong $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} =$

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

- Phép cộng trong $\mathbb{R}^n$
  Xét hai phần tử
  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, phép cộng và là một phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$, kí hiệu $x + y$ và được xác định :

  $$x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n$$

- Phép nhân trong $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa :
$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} =$
$\{(x_1, x_2, ..., x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$.

- Phép cộng trong $\mathbb{R}^n$
  Xét hai phần tử
  $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, phép cộng và là một phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$, kí hiệu $x + y$ và được xác định :

  $$x+y = (x_1, x_2, ..., x_n)+(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_r$$

- Phép nhân trong $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$, cho $x = (1;0;2)$, $y = (-3;-2;0)$ và $k = -2$ ta có : $x + y = (1 + (-3)\,;0 + (-2)\,;2 + 0) = (-2;-2;2)$.
$kx = -2.\,(1;0;2) = (-2;0;-4)$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$, cho $x = (1;0;2)$, $y = (-3;-2;0)$ và $k = -2$ ta có : $x + y = (1 + (-3)\,; 0 + (-2)\,; 2 + 0) = (-2;-2;2)$.
$kx = -2.(1;0;2) = (-2;0;-4)$.

Nhận xét

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$, cho $x = (1;0;2)$, $y = (-3;-2;0)$ và $k = -2$ ta có : $x + y = (1 + (-3)\,;0 + (-2)\,;2 + 0) = (-2;-2;2)$.
$kx = -2.\,(1;0;2) = (-2;0;-4)$.

Nhận xét

Tập $\mathbb{R}^n$, cùng hai phép cộng và nhân định nghĩa trên lập thành một không gian vector, với phần tử trung hòa $\theta = (0,0,...,0)$, phần tử đối của $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \tag{2.1}$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \qquad (2.1)$$

Nếu điều kiện (2.1) chỉ xảy ra khi : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \tag{2.1}$$

Nếu điều kiện (2.1) chỉ xảy ra khi : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Hệ S không độc lập tuyến tính thì ta gọi là phụ thuộc tuyến tính, tức là điều kiện (2.1) xảy ra khi tồn tại số $\alpha_i \neq 0$ nào đó.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \qquad (2.1)$$

Nếu điều kiện (2.1) chỉ xảy ra khi : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Hệ S không độc lập tuyến tính thì ta gọi là phụ thuộc tuyến tính, tức là điều kiện (2.1) xảy ra khi tồn tại số $\alpha_i \neq 0$ nào đó.

Ví dụ 2.6

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \tag{2.1}$$

Nếu điều kiện (2.1) chỉ xảy ra khi : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Hệ S không độc lập tuyến tính thì ta gọi là phụ thuộc tuyến tính, tức là điều kiện (2.1) xảy ra khi tồn tại số $\alpha_i \neq 0$ nào đó.

Ví dụ 2.6

Trong không gian $\mathbb{R}^2$ hệ $s = \{x_1 = (1;0)\,,\ x_2 = (0;1)\}$ là độc lập tuyến tính.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa

Gọi $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là họ vector trong $\mathbb{R}^n$. Xét điều kiện :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \theta. \tag{2.1}$$

Nếu điều kiện (2.1) chỉ xảy ra khi : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Hệ S không độc lập tuyến tính thì ta gọi là phụ thuộc tuyến tính, tức là điều kiện (2.1) xảy ra khi tồn tại số $\alpha_i \neq 0$ nào đó.

Ví dụ 2.6

Trong không gian $\mathbb{R}^2$ hệ $s = \{x_1 = (1; 0)\,,\ x_2 = (0; 1)\}$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét điều kiện : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \theta$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :$S = \{x_1 = (1; -1; 0), x_2 = (0; 2; 1), x_3 = (-1; 3; 1)\}$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :$S = \{x_1 = (1;-1;0)\,, x_2 = (0;2;1)\,, x_3 = (-1;3;1)\}$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta \Leftrightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_3; -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) = (0;0;0)$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :$S = \{x_1 = (1;-1;0)\,, x_2 = (0;2;1)\,, x_3 = (-1;3;1)\}$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta \Leftrightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_3; -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) = (0;0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :$S = \{x_1 = (1; -1; 0)\,, x_2 = (0; 2; 1)\,, x_3 = (-1; 3; 1)\}$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta \Leftrightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_3; -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) = (0;0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ 2.7

Trong $\mathbb{R}^3$ xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ :$S = \{x_1 = (1;-1;0)\,, x_2 = (0;2;1)\,, x_3 = (-1;3;1)\}$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \theta \Leftrightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_3; -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) = (0;0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

Không gian vector V được gọi là không gian n chiều $(n \in \mathbb{N}^*)$ nếu trong V tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không tồn tại quá n vector độc lập tuyến tính. Kí hiệu : $dim(V) = n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

Không gian vector V được gọi là không gian n chiều $(n \in \mathbb{N}^*)$ nếu trong V tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không tồn tại quá n vector độc lập tuyến tính. Kí hiệu : $dim(V) = n$.

Định nghĩa 2.5

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

Không gian vector V được gọi là không gian n chiều $(n \in \mathbb{N}^*)$ nếu trong V tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không tồn tại quá n vector độc lập tuyến tính. Kí hiệu : $dim(V) = n$.

Định nghĩa 2.5

Trong không gian n chiều V mọi họ gồm n vector độc lập tuyến tính gọi là một cơ sở của V.

Nhận xét.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

Không gian vector V được gọi là không gian n chiều $(n \in \mathbb{N}^*)$ nếu trong V tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không tồn tại quá n vector độc lập tuyến tính. Kí hiệu : $dim(V) = n$.

Định nghĩa 2.5

Trong không gian n chiều V mọi họ gồm n vector độc lập tuyến tính gọi là một cơ sở của V.

Nhận xét. Không gian vector $\mathbb{R}^n$ là một không gian n chiều.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.4

Không gian vector V được gọi là không gian n chiều $(n \in \mathbb{N}^*)$ nếu trong V tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không tồn tại quá n vector độc lập tuyến tính. Kí hiệu : $dim(V) = n$.

Định nghĩa 2.5

Trong không gian n chiều V mọi họ gồm n vector độc lập tuyến tính gọi là một cơ sở của V.

Nhận xét. Không gian vector $\mathbb{R}^n$ là một không gian n chiều.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.8

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.8

Xét hệ

$$\{u_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,,\ u_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,, ...,\ u_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}\,.$$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.8

Xét hệ

$$\{u_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,,\ u_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,, ...,\ u_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}\,.$$

Dễ dàng kiểm tra hệ trên độc lập tuyến tính và là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, ta gọi đây là cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.8

Xét hệ

$$\{u_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,,\ u_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,, ...,\ u_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}\,.$$

Dễ dàng kiểm tra hệ trên độc lập tuyến tính và là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, ta gọi đây là cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Chú ý

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Chú ý

Mọi vector trong $\mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn bởi một tổ hợp tuyến tính qua các vector trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^n$, nghĩa là với $x \in \mathbb{R}^n$ và $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi đó tồn tại bộ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ để : $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Chú ý

Mọi vector trong $\mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn bởi một tổ hợp tuyến tính qua các vector trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^n$, nghĩa là với $x \in \mathbb{R}^n$ và $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi đó tồn tại bộ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ để : $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.

Ví dụ 2.9

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$

Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Chú ý

Mọi vector trong $\mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn bởi một tổ hợp tuyến tính qua các vector trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^n$, nghĩa là với $x \in \mathbb{R}^n$ và $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi đó tồn tại bộ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ để : $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.

Ví dụ 2.9

Trong $\mathbb{R}^3$ xét cơ sở
$\{u_1 = (1;0;0)\,, u_2 = (0;1;0)\,, u_3 = (0;0;1)\}$và vector
$x = (-1;3;-5)$. Khi đó ta có biểu diễn :
$x = (-1;0;0) + (0;3;0) + (0;0;-5) = -1.u_1 + 3.u_2 - 5.u_3$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

Định lý 2.1

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

Định lý 2.1

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó W là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn :

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

Định lý 2.1

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó W là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn :
1) Nếu $x, y \in W$ thì $x + y \in W$ (W đóng kín đối với phép cộng) ;

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

Định lý 2.1

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó W là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn :
1) Nếu $x, y \in W$ thì $x + y \in W$ (W đóng kín đối với phép cộng) ;
2) Nếu $k \in \mathbb{R}$ và $x \in W$ thì $kx \in W$ (W đóng kín đối với phép nhân).

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Nếu W cùng hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{R}^n$ lập thành một không gian vector thì W được gọi là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^n$.

Định lý 2.1

W là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó W là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn :
1) Nếu $x, y \in W$ thì $x + y \in W$ (W đóng kín đối với phép cộng) ;
2) Nếu $k \in \mathbb{R}$ và $x \in W$ thì $kx \in W$ (W đóng kín đối với phép nhân).

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

Xét tập con $W = \{(a, b, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

Xét tập con $W = \{(a, b, 0) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?
HD. Với $x_1 = (a_1, b_1, 0)$, $x_2 = (a_2, b_2, 0) \in W$ và số thực k, ta có :
+) $x_1 + x_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0) \in W$

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

Xét tập con $W = \{(a, b, 0) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?
HD. Với $x_1 = (a_1, b_1, 0)$, $x_2 = (a_2, b_2, 0) \in W$ và số thực k, ta có :
+) $x_1 + x_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0) \in W$
+) $kx_1 = (ka_1; kb_1; 0) \in W$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

Xét tập con $W = \{(a, b, 0) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?
HD. Với $x_1 = (a_1, b_1, 0)$, $x_2 = (a_2, b_2, 0) \in W$ và số thực k, ta có :
+) $x_1 + x_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0) \in W$
+) $kx_1 = (ka_1; kb_1; 0) \in W$.
Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

2.2.2. Không gian $\mathbb{R}^n$
Không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

Ví dụ 2.10

Xét tập con $W = \{(a, b, 0) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?
HD. Với $x_1 = (a_1, b_1, 0)$, $x_2 = (a_2, b_2, 0) \in W$ và số thực k, ta có :
+) $x_1 + x_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0) \in W$
+) $kx_1 = (ka_1; kb_1; 0) \in W$.
Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).

Hay f thỏa mãn điều kiện sau :

$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}.$

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).

Hay f thỏa mãn điều kiện sau :

$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}.$

Tính chất

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).
Hay f thỏa mãn điều kiện sau :
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}.$

Tính chất

- $f(\theta) = \theta$

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).
Hay f thỏa mãn điều kiện sau :
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}.$

Tính chất

- $f(\theta) = \theta$
- $f(-x) = -f(x)$

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).
Hay f thỏa mãn điều kiện sau :
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}$.

Tính chất

- $f(\theta) = \theta$
- $f(-x) = -f(x)$
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).
Hay f thỏa mãn điều kiện sau :
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}$.

Tính chất

- $f(\theta) = \theta$
- $f(-x) = -f(x)$
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$
- $f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) =$

2.2.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa 2.7

Cho hai không gian vector V và V'. Ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu $\forall x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (tính cộng tính) ;
ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (tính thuần nhất).
Hay f thỏa mãn điều kiện sau :
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \mu \in \mathbb{R}$.

Tính chất

- $f(\theta) = \theta$
- $f(-x) = -f(x)$
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$
- $f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) =$

Ví dụ

Ví dụ

Ví dụ 2.11

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f : V \to V'$; $f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f: V \to V'$; $\quad f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f: V \to V'$; $\quad f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ 2.12

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f : V \to V'$; $f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ 2.12

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x; y)$. Hỏi f có phải là ánh xạ tuyến tính hay không ?

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f : V \to V'$; $f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ 2.12

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x; y)$. Hỏi f có phải là ánh xạ tuyến tính hay không ?
Ta có $a = (x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in R$
$a + b = (x_1 + x_2)$, $\lambda a = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f : V \to V'$; $f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ 2.12

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x; y)$. Hỏi f có phải là ánh xạ tuyến tính hay không ?
Ta có $a = (x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \ R$
$a + b = (x_1 + x_2), \quad \lambda a = (\lambda x_1, \lambda x_2)$
Vậy
$f(a + b) = (2(x_1 + x_2); y_1 + y_2) = (2x_1; y_1) + (2x_2; y_2) =$
$f(a) + f(b),$
$f(\lambda a) = (2\lambda x_1; \lambda y_1) = \lambda(2x_1; y_1) = \lambda a.$

Ví dụ

Ví dụ 2.11

a) $f : V \to V'$; $f(x) = \theta$ (ánh xạ không) ;
b) $f : V \to V'$; $f(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất).

Ví dụ 2.12

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x; y)$. Hỏi f có phải là ánh xạ tuyến tính hay không ?
Ta có $a = (x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in R$
$a + b = (x_1 + x_2)$, $\lambda a = (\lambda x_1, \lambda x_2)$
Vậy
$f(a + b) = (2(x_1 + x_2); y_1 + y_2) = (2x_1; y_1) + (2x_2; y_2) = f(a) + f(b)$,
$f(\lambda a) = (2\lambda x_1; \lambda y_1) = \lambda(2x_1; y_1) = \lambda a.$

Ví dụ

Ví dụ

Ví dụ 2.13

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x;y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (x; y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a) = (\lambda x_1, \lambda^2 y_1^2) = \lambda(x_1; \lambda y^2) \neq \lambda f(a)$

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x; y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a) = (\lambda x_1, \lambda^2 y_1^2) = \lambda(x_1; \lambda y^2) \neq \lambda f(a)$
Vậy f không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x;y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a)=(\lambda x_1,\lambda^2 y_1^2)=\lambda(x_1;\lambda y^2)\neq\lambda f(a)$
Vậy f không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2.14

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x;y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a)=(\lambda x_1,\lambda^2y_1^2)=\lambda(x_1;\lambda y^2)\neq\lambda f(a)$
Vậy f không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2.14

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ f(x,y,z)=(x;y^2;z)$ không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x;y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a)=(\lambda x_1,\lambda^2 y_1^2)=\lambda(x_1;\lambda y^2)\neq\lambda f(a)$
Vậy f không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2.14

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ f(x,y,z)=(x;y^2;z)$ không là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, dễ kiểm tra với số thực λ khác không, khác ±1 ta có :
$f\left[\lambda\left(x;y;z\right)\right]=\left(\lambda x;\lambda^2 y^2;\lambda z\right)\neq\left(\lambda x;\lambda y^2;\lambda z\right)=\lambda f\left(x,y,z\right).$

Ví dụ

Ví dụ 2.13

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x;y^2)$ có là ánh xạ tuyến tính ?
Ta có $f(\lambda a)=(\lambda x_1,\lambda^2 y_1^2)=\lambda(x_1;\lambda y^2)\neq\lambda f(a)$
Vậy f không là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2.14

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ f(x,y,z)=(x;y^2;z)$ không là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, dễ kiểm tra với số thực λ khác không, khác ±1 ta có :
$f\left[\lambda\left(x;y;z\right)\right]=\left(\lambda x;\lambda^2y^2;\lambda z\right)\neq\left(\lambda x;\lambda y^2;\lambda z\right)=\lambda f\left(x,y,z\right).$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$. Khi đó :

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$. Khi đó :
Tập tất cả các phần tử của V có ảnh là phần tử $\theta \in V'$ gọi là hạt nhân của f. Kí hiệu :

$$Ker(f) = \{x \in V | f(x) = \theta \in V'\} \subset V$$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$. Khi đó :
Tập tất cả các phần tử của V có ảnh là phần tử $\theta \in V'$ gọi là hạt nhân của f. Kí hiệu :

$$Ker(f) = \{x \in V | f(x) = \theta \in V'\} \subset V$$

Tập tất cả các phần tử của V' là ảnh của ít nhất một phần tử của V gọi là ảnh của ánh xạ f, kí hiệu :

$$Im(f) = \{y \in V' | \exists x \in V : \quad f(x) = y\} \subset V'$$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$. Khi đó :
Tập tất cả các phần tử của V có ảnh là phần tử $\theta \in V'$ gọi là hạt nhân của f. Kí hiệu :

$$Ker(f) = \{x \in V | f(x) = \theta \in V'\} \subset V$$

Tập tất cả các phần tử của V' là ảnh của ít nhất một phần tử của V gọi là ảnh của ánh xạ f, kí hiệu :

$$Im(f) = \{y \in V' | \exists x \in V : \quad f(x) = y\} \subset V'$$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

Ví dụ 2.16

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

Ví dụ 2.16

Ánh xạ đồng nhất $I : V \to V$ có :

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

Ví dụ 2.16

Ánh xạ đồng nhất $I : V \to V$ có :
+) $Ker(I) = \{\theta\}$ vì θ là ảnh của duy nhất một phần tử $\theta \in V$,

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

Ví dụ 2.16

Ánh xạ đồng nhất $I : V \to V$ có :
+) $Ker(I) = \{\theta\}$ vì θ là ảnh của duy nhất một phần tử $\theta \in V$,
+) $Im(I) = V$ vì $\forall x \in V, \quad \exists! x \in V : I(x) = x.$

2.2.2. Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2.15

Ánh xạ $\theta : V \to V'$ có $Kerf(\theta) = V$ vì $\exists x \in V$ thì $\theta(x) = \theta \in V'$

Ví dụ 2.16

Ánh xạ đồng nhất $I : V \to V$ có :
+) $Ker(I) = \{\theta\}$ vì θ là ảnh của duy nhất một phần tử $\theta \in V$,
+) $Im(I) = V$ vì $\forall x \in V, \quad \exists! x \in V : I(x) = x$.

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{c} V \times V \to V \\ x \longmapsto f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{rcl} V \times V & \rightarrow & V \\ x & \longmapsto & f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Ker f = \theta$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{c} V \times V \to V \\ x \longmapsto f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ x & \longmapsto & f(x)=\alpha x(\alpha \neq 0) \end{array}$

$+)$ $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

$+)$ $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho f : $\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ x & \longmapsto & f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \{x, y, x + y\}$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \underset{x}{V \times V} \underset{\longmapsto f(x)=\alpha x (\alpha \neq 0)}{\rightarrow V}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = \{x, y, x + y\}$

Ta có

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{c} V \times V \to V \\ x \longmapsto f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \{x, y, x+y\}$

Ta có

$Kef = \{(x,y)|f(x,y) = \theta = \{(x,y)|x = 0, y = 0, x+y = 0\} = \{0, 0\},$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho f : $\begin{array}{c} V \times V \to V \\ x \longmapsto f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \{x, y, x + y\}$

Ta có

$Kef = \{(x, y)|f(x, y) = \theta = \{(x, y)|x = 0, y = 0, x + y = 0\} = \{0, 0\}$,

$Imf = \{f(x, y)|(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f[x(1, 0) + y(0, 1)]|(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$,

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{c} V \times V \to V \\ x \longmapsto f(x) = \alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \{x, y, x+y\}$

Ta có

$Kef = \{(x,y)|f(x,y) = \theta = \{(x,y)|x = 0, y = 0, x+y = 0\} = \{0,0\}$,

$Imf = \{f(x,y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f[x(1,0) + y(0,1)]|(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$,

$= \{xf(1,0) + yf(0,1)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} =$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \quad V \times V \to V$
$\qquad x \longmapsto f(x)=\alpha x (\alpha \neq 0)$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \{x, y, x + y\}$

Ta có

$Kef = \{(x, y)|f(x, y) = \theta = \{(x, y)|x = 0, y = 0, x + y = 0\} = \{0, 0\}$,

$Imf = \{f(x, y)|(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f[x(1, 0) + y(0, 1)]|(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$,

$= \{x f(1, 0) + y f(0, 1)|(x, y) \in \mathbb{R}^2\} =$

Ví dụ

Ví dụ 2.17

Cho $f: \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ x & \longmapsto & f(x)=\alpha x (\alpha \neq 0) \end{array}$

+) $f(x) = \alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$. Vậy $Kerf = \theta$

+) $\forall \in V', \exists x = \dfrac{1}{2} y \in V : \alpha x = y$. Vậy $Imf = V$.

Ví dụ 2.18

Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \{x, y, x+y\}$

Ta có

$Kef = \{(x,y) | f(x,y) = \theta = \{(x,y) | x = 0, y = 0, x + y = 0\} = \{0, 0\}$,

$Imf = \{f(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f[x(1,0) + y(0,1)] | (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$,

$= \{xf(1,0) + yf(0,1) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} =$

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.

$+)$ Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.

+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :

$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf,$

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf$,
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf$.

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf$,
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf$.
Vậy Ker$f$ là không gian con của V.

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f: V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf,$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf.$
Vậy Ker$f$ là không gian con của V.
+) Với y, y' tùy ý thuộc Imf, $\lambda \in \mathbb{R} \to \forall x, x' \in V$ sao cho $y = f(x); y' = f(x')$ Ta có :

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf$,
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf$.
Vậy Ker$f$ là không gian con của V.
+) Với y, y' tùy ý thuộc Imf, $\lambda \in \mathbb{R} \to \forall x, x' \in V$ sao cho
$y = f(x); y' = f(x')$ Ta có :
$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in Imf$

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf,$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf.$
Vậy Ker$f$ là không gian con của V.
+) Với y, y' tùy ý thuộc Imf, $\lambda \in \mathbb{R} \to \forall x, x' \in V$ sao cho $y = f(x); y' = f(x')$ Ta có :
$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in Imf$
$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in Imf$

Mối quan hệ giữa hạt nhân và ảnh

Định lý 2.2

Cho $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính, khi đó $Kerf$ là một không gian tuyến tính con của V và Imf là một không gian con của V'.

Chứng minh.
+) Với $x, y \in Kerf, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có :
$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x + y \in Kerf,$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\theta$ nên $\lambda x \in Kerf.$
Vậy Ker$f$ là không gian con của V.
+) Với y, y' tùy ý thuộc Imf, $\lambda \in \mathbb{R} \to \forall x, x' \in V$ sao cho
$y = f(x); y' = f(x')$ Ta có :
$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in Imf$
$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in Imf$

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector
- Ánh xạ tuyến tính

Chương 2. Không gian vector, ánh xạ tuyến tính

- Không gian vector
- Ánh xạ tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

2.1.1. Định nghĩa, ví dụ và các tính chất

2.2.1. Khái niệm

Chương 3. Phép tính vi phân

- Phép tính vi phân hàm một biến

Chương 3. Phép tính vi phân

- Phép tính vi phân hàm một biến
- Phép tính vi phân hàm nhiều biến

Chương 3. Phép tính vi phân

- Phép tính vi phân hàm một biến
- Phép tính vi phân hàm nhiều biến

3.1.1. Giới hạn

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.
- Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ.

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.
- Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 3.1

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.
- Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 3.1

Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.
- Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 3.1

Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.

Định lý 3.2

3.1.1. Giới hạn

Định nghĩa 3.2

Ta nói rằng :

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$

- Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a.
- Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 3.1

Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.

Định lý 3.2

Nếu dãy số thực $\{a_n\}$ có giới hạn là a, thì mọi dãy con của nó cũng có giới hạn là a.

Định nghĩa

Chương 4. Phép tính tích phân

- Tích phân của hàm một biến

Chương 4. Phép tính tích phân

- Tích phân của hàm một biến
- Tích phân hàm nhiều biến

Chương 4. Phép tính tích phân

- Tích phân của hàm một biến
- Tích phân hàm nhiều biến

Định nghĩa

Định nghĩa

Chương 5.Phương trình vi phân

- Phương trình vi phân cấp 1

Chương 5.Phương trình vi phân

- Phương trình vi phân cấp 1
- Phương trình vi phân cấp 2

Chương 5.Phương trình vi phân

- Phương trình vi phân cấp 1
- Phương trình vi phân cấp 2

Định nghĩa

Định nghĩa